Luciano Pandolfi

# Integrale di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$

Questa versione è scritta in carattere bastone e non giustificata a destra in modo da essere più leggibile per chi ha problemi di dislessia.

Una versione in caratteri romani e giustificata ha per titolo *Integrale di Lebesgue in* $\mathbb{R}^n$.

L. Pandolfi, in pensione dal Politecnico di Torino, Dipartimento di Scienze Matematiche "G.L. Lagrange"

# Indice

# Capitolo 1

# Insiemi e funzioni misurabili

L'integrale di Lebesgue si può introdurre in vari modi. Noi seguiamo la via di identificare prima di tutto una famiglia di insiemi su cui si può definire una misura, la misura di Lebesgue, che poi condurrà alla definizione dell'integrale. Tale famiglia di insiemi è studiata in questo capitolo. Prima di ciò, spiegheremo perché è necessario introdurre un integrale "più generale" di quello di Riemann.

**Osservazione 1** Come si vedrà al paragrafo 2.3, una funzione integrabile secondo Riemann, e quindi in particolare limitata e definita su un insieme limitato, è integrabile anche secondo Lebesgue, e i due integrali hanno il medesimo valore. Quindi l'integrale di Lebesgue "assorbe" l'integrale di Riemann, che potrebbe anche ignorarsi. Invece, l'integrale di Lebesgue di un funzione illimitata e/o definita su un insieme illimitato e l'integrale improprio sono due concetti diversi e hanno usi diversi. Dunque, l'integrale di Lebesgue non "assorbe" e non rende inutile la conoscenza dell'integrale improprio. ∎

**Osservazione 2 (Sulle notazioni)** Useremo le notazioni standard della teoria degli insiemi, con l'avvertenza che la tilde: $\tilde{}$ indica il complementare di un insieme:

$$\tilde{A} = \{x \,:\, x \notin A\} \,.$$

Se si lavora con sottoinsiemi di un fissato insieme $Q$ allora la tilde indica il complementare relativo a $Q$:

$$\tilde{A} = \{x \,:\, x \notin A\} \cap Q = Q - A \,.$$

Il simbolo $\triangle$ indica la differenza simmetrica:

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) \,. \quad ∎$$

## 1.1 Introduzione

E' noto che esistono funzioni, come la funzione di Dirichlet, che non sono integrabili secondo Riemann. Vedremo che la funzione di Dirichlet è integrabile secondo Lebesgue, ma la ragione per introdurre questo nuovo integrale non è di allargare la classe delle funzioni integrabili. La ragione invece è la seguente: in numerosi problemi dell'Analisi matematica è necessario scambiare il segno di limite, o di serie, con quello di integrale, si pensi per esempio alle serie di Fourier. Tipicamente, le serie di Fourier non convergono uniformemente, condizione che è richiesta per lo scambio di limiti ed integrali di Riemann. E' questa la ragione che ha indotto a costruire integrali più generali di quello di Riemann.

Consideriamo la funzione di DIRICHLET da questo punto di vista.

**Esempio 3** La funzione di Dirichlet è definita su $0 \le x \le 1$ da:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = q \text{ è razionale} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Essa è limite di una successione $(f_k)$ di funzioni integrabili secondo Riemann. Si ricordi infatti che i razionali sono numerabili. Sia $(q_r)$ la successione dei razionali in $[0, 1]$ e sia

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = q_r \text{ con } r \le k \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ovviamente,

$$\lim f_k(x) = f(x)\,, \qquad \lim \int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Non possiamo però dire che

$$\lim \int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

*perché la funzione $f(x)$ non è integrabile.*

Se vogliamo dare un senso alla formula precedente, dovremo costruire una teoria dell'integrazione che permetta di integrare anche la funzione di Dirichlet.

Si osservi che se la formula precedente deve valere, allora l'integrale della funzione di Dirichlet deve essere nullo. ∎

La funzione di Dirichlet è la funzione caratteristica dei razionali di $[0,1]$ e quindi il suo integrale, se in qualche modo definito, dovrebbe interpretarsi come la "misura" dell'insieme di tali razionali. Dunque, l'insieme dei razionali di $[0,1]$ deve avere misura nulla se i limiti possono scambiarsi col segno di integrale[1].

Definiamo ora: un insieme $I \subseteq \mathbb{R}$ è NULLO se per ogni $\epsilon > 0$ esiste una successione di intervalli aperti $(a_r, b_r)$, disgiunti o meno, tali che :

$$I \subseteq \bigcup (a_r, b_r)\,, \qquad \sum_r (b_r - a_r) < \epsilon\,.$$

Si nota facilmente che un insieme che ha misura zero secondo Peano-Jordan è anche un insieme nullo secondo la definizione precedente, ma non viceversa. Si prova infatti che l'insieme dei razionali di $[0,1]$, non misurabile secondo Peano-Jordan, è un insieme nullo secondo la definizione precedente, si veda l'Esempio 31. D'altra parte, la definizione appena data di insieme nullo interviene nella caratterizzazione delle funzioni integrabili secondo Riemann e ciò mostra una delle ragioni per estendere il concetto di misura ad una classe più ampia di insiemi.

Vale:

**Teorema 4 (**di RIEMANN-LEBESGUE**)** *Una funzione limitata $f(x)$ definita su un intervallo limitato $(a,b)$ di $\mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann se e solo se l'insieme dei suoi punti di discontinuità è un insieme nullo.*

**Osservazione 5** Si noti che:

- il Teorema 4 mostra immediatamente il fatto noto che la funzione di Dirichlet non è integrabile secondo Riemann. Infatti essa è discontinua in ciascun punto di $[0,1]$ e $[0,1]$ non è un insieme nullo.
- Ricordiamo che ogni unione di intervalli aperti può rappresentarsi come unione *disgiunta* di intervalli aperti. Nella definizione di insieme nullo si potrebbe richiedere che gli intervalli $(a_i, b_i)$ siano disgiunti. E' però più comodo, ed ovviamente non restrittivo, non richiedere che gli intervalli siano disgiunti. ∎

[1] chi conosce la misura di Peano-Jordan ricorda che l'insieme dei razionali non è misurabile secondo Peano-Jordan. D'altra parte la teoria della misura di Peano-Jordan è insufficiente anche per la trattazione del solo integrale di Riemann come mostra l'enunciato del Teorema 4

## 1.2 Preliminari sulle misure di insiemi

Passiamo ora ad introdurre la teoria della misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$. Conviene premettere alcune nozioni più astratte sulla struttura di certe famiglie di insiemi e sulle misure definite su di esse.

### 1.2.1 Anelli ed algebre di insiemi

Sia $\mathcal{S}$ una famiglia non vuota di s.insiemi di un assegnato insieme $\Omega$. In $\mathcal{S}$ consideriamo le due operazioni di intersezione e di differenza simmetrica. Diciamo che la famiglia di insiemi $\mathcal{S}$ è un ANELLO DI INSIEMI se è chiusa rispetto a tali operazioni:

$$A\,,\ B \in \mathcal{S} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A \triangle B \in \mathcal{S}\,, \\ A \cap B \in \mathcal{S}\,. \end{array} \right.$$

Dato che

$$A - B = A \triangle (A \cap B)\,, \qquad A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)\,,$$

si vede che se $\mathcal{S}$ è un anello di insiemi allora esso è chiuso rispetto alle operazioni di unione e di differenza di insiemi ed inoltre

$$\emptyset = A - A \in \mathcal{S}\,.$$

Dato che $\emptyset$ è l'identità rispetto all'operazione $\triangle$, si vede che un anello di insiemi è un anello (secondo la definizione incontrata nel corso di Algebra) rispetto alle due operazioni $+ = \triangle$ e $\cdot = \cap$.

Si sa che un anello con identità moltiplicativa si chiama un'algebra; e l'identità rispetto all'operazione di intersezione è $\Omega$. Dunque un'anello di s.insiemi di $\Omega$ ed a cui $\Omega$ appartiene si chiama un'ALGEBRA DI INSIEMI.

Si osservi ora che

$$A \cap B = (\widetilde{\tilde{A} \cup \tilde{B}})\,, \qquad A \triangle B = \left\{ (\widetilde{A \cap B}) \right\} \cap (A \cup B)\,,$$

dove la tilde ($\tilde{\ }$) indica il complementare. Dunque:

**Teorema 6** *Sia $\mathcal{S}$ una famiglia di s.insiemi di $\Omega$ a cui appartiene anche $\Omega$. La famiglia $\mathcal{S}$ è un'algebra di insiemi se e solo se*

$$A\,,\ B \in \mathcal{S} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A \cup B \in \mathcal{S} \\ \tilde{A} \in \mathcal{S}\,. \end{array} \right.$$

Il teorema precedente dà una definizione alternativa di algebra di insiemi, che risulta più comoda per le applicazioni.

Un anello, rispettivamente un'algebra, di insiemi si dice $\sigma$-ANELLO, rispettivamente $\sigma$-ALGEBRA quando è chiusa rispetto alle unioni *numerabili* di suoi elementi; ossia quando

$$A_n \in \mathcal{S} \implies \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{S}\,.$$

Usando le proprietà delle operazioni tra insiemi si vede che un $\sigma$-anello è anche chiuso rispetto alle operazioni di intersezione, differenza, differenza simmetrica, di successioni di suoi elementi.

Ricordando la proprietà di additività dell'integrale di Riemann,

$$\int_{A\cup B} = \int_A + \int_B$$

che dovrà valere anche per l'integrale di Lebesgue, si capisce l'interesse che anelli ed algebre di insiemi hanno nella teoria dell'integrazione.

**Osservazione 7** E' opportuno sottolineare la differenza tra la definizione di *topologia* e quella di *$\sigma$-algebra.* Una topologia su $\Omega$ è una famiglia $\mathcal{T}$ di sottoinsiemi di $\Omega$ che contiene l'insieme vuoto ed $\Omega$, e contiene l'unione degli elementi di *ciascun suo s.insieme.* Contiene inoltre le intersezioni degli elementi dei suoi *s.insiemi finiti.* Invece, una $\sigma$-algebra su $\Omega$ è una famiglia di sottoinsiemi di $\Omega$ che contiene, oltre ad $\Omega$ e $\emptyset$, le unioni *e anche* le intersezioni degli elementi dei suoi s.insiemi che sono *finiti o numerabili.*

Niente si richiede alle unioni o intersezioni di famiglie non numerabili. ∎

Si vede facilmente:

**Teorema 8** *Sia $\mathcal{S}$ una famiglia non vuota di s.insiemi di $\Omega$. Esistono un* minimo *anello, algebra, $\sigma$-anello, $\sigma$-algebra contenenti $\mathcal{S}$.*

### 1.2.2 Un esempio: Insiemi semplici di $\mathbb{R}^n$

L'esempio seguente è per noi particolarmente importante, perché è a partire da esso che introdurremo la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$. L'insieme $\Omega$ è

$$\Omega = [a,b) \subseteq \mathbb{R} \qquad -\infty \leq a < b \leq +\infty$$

se $n = 1$ oppure, se $n > 1$,

$$\Omega = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \subseteq \mathbb{R}^n\,, \qquad -\infty \leq a_i < b_i \leq +\infty\,.$$

Per chiarezza, consideriamo prima di tutto il caso $\Omega = [a,b) \subseteq \mathbb{R}$. Un anello di s.insiemi di $[a,b)$ è la famiglia delle unioni finite di intervalli

$$[\alpha, \beta) \subseteq [a,b) \tag{1.1}$$

aperti a destra e chiusi a sinistra (per contrasto si noti che la famiglia delle unioni finite o meno di intervalli aperti non è un anello perchè non è chiusa rispetto alla differenza di insiemi). Vale:

**Teorema 9** *Ogni aperto di $\mathbb{R}$ è unione* numerabile *di intervalli come in (1.1), due a due disgiunti.*

Un risultato analogo vale anche in $\mathbb{R}^n$:

**Teorema 10** *Ogni aperto di $\mathbb{R}^n$ è unione* numerabile *di insiemi, due a due disgiunti, della forma*

$$\prod_{i=1}^{n} [x_i, y_i)\,.$$

Questo teorema suggerisce di chiamare INSIEME ELEMENTARE di $\mathbb{R}^n$ un insieme della forma

$$\prod_{i=1}^{n} [x_i, y_i)\,.$$

Chiameremo INSIEME SEMPLICE l'insieme vuoto oppure un insieme che è unione *finita* di insiemi elementari. Si noti che un insieme semplice può rappresentarsi in più modi come unione di insiemi elementari.

Si vede facilmente che *la famiglia degli insiemi semplici di $\mathbb{R}^n$ è un anello; e, se si decide di lavorare soltanto con quelli che sono contenuti in un dato insieme elementare, si ha un'algebra.*

La minima $\sigma$-algebra che contiene tutti gli insiemi semplici di $\mathbb{R}^n$, e che contiene $\mathbb{R}^n$ stesso, si chiama la $\sigma$-ALGEBRA DI BOREL di $\mathbb{R}^n$, e i suoi elementi si chiamano BORELIANI.

Da ciò che abbiamo detto, non è difficile provare che sia gli insiemi aperti che gli insiemi chiusi sono boreliani.

### 1.2.3 Misure di insiemi

Sia $\Omega$ un insieme. Si chiama MISURA su $\Omega$ una funzione $A \to m(A)$ dai s.insiemi di $\Omega$ nei reali non negativi, tale che:

- Il dominio della funzione è un anello $\mathcal{S}$ di s.insiemi di $\Omega$;
- se $A$, $B$ sono elementi *disgiunti* di $\mathcal{S}$, ossia tali che $A \cap B = \emptyset$, allora

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B)\,.$$

La misura si chiama $\sigma$-ADDITIVA se è una misura e inoltre per ogni *successione* $(A_r)$ di elementi di $\mathcal{S}$, *due a due disgiunti*, ossia tali che $A_r \cap A_k = \emptyset$ per $r \neq k$, vale

$$\bigcup A_r \in \mathcal{S} \quad \Longrightarrow \quad m\left(\bigcup_{r=1}^{+\infty} A_r\right) = \sum_{r=1}^{+\infty} m(A_r)\,.$$

**Osservazione 11** In generale, se $\mathcal{S}$ non è un $\sigma$-anello, l'unione degli $A_r$ non è un elemento dei $\mathcal{S}$. In tal caso niente si richiede alle misure degli $A_r$. ∎

Talvolta conviene permettere ad una misura di prendere valori in $[0, +\infty]$. Per contrasto, la misura si dice FINITA se essa prende valore in $[0, +\infty)$. La misura si chiama PROBABILITÀ se prende valori in $[0, 1]$.

Proviamo ora:

**Teorema 12** *Sia $m$ una misura su un anello $\mathcal{S}$. Vale:*

1. *se $A$, $B$ sono elementi di $\mathcal{S}$, $A \subseteq B$, allora $m(A) \leq m(B)$;*
2. *Se $A$, $B$ sono elementi di $\mathcal{S}$ allora si ha $m(A) = m(A - B) + m(A \cap B)$;*
3. *se $m$ è una misura e se esiste $A$ tale che $m(A) < +\infty$, allora $m(\emptyset) = 0$.*
4. *se $m$ è una misura finita allora $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$;*

**Dim.** Notiamo che $A \subseteq B$ implica

$$B = A \cup [B - A]\,, \qquad A \cap [B - A] = \emptyset\,.$$

Dunque, se $A \subseteq B$ si ha:

$$m(B) = m(A) + m(B - A) \geq m(A)\,.$$

Ciò prova la proprietà 1.

La proprietà 2 segue dall'additività della misura, applicata all'uguaglianza

$$A = (A - B) \cup (A \cap B),$$

notando che l'unione è disgiunta.

La proprietà 3 discende da

$$A \cup \emptyset = A\,, \quad A \cap \emptyset = \emptyset \qquad \text{così che} \qquad m(A) = m(A) + m(\emptyset)\,.$$

Semplificando $m(A)$ segue $m(\emptyset) = 0$.

La proprietà 4 segue notando che

$$A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)\,.$$

L'unione è disgiunta e quindi

$$m(A \cup B) = m(A - B) + m(B - A) + m(A \cap B)\,.$$

Essendo finita la misura, dalla proprietà 2 si ha

$$m(A - B) = m(A) - m(A \cap B)\,, \qquad m(B - A) = m(B) - m(B \cap A)\,.$$

Sostituendo segue l'asserto (è appena il caso di notare che $m(A \cap B) = m(B \cap A)$). ∎

La proprietà 1 provata al Teorema 12 si chiama la PROPRIETÀ DI MONOTONIA DELLA MISURA.

Diamo ora un criterio comodo per provare la $\sigma$–additività di una misura.

**Teorema 13** *Sia $\mathcal{S}$ un anello e sia $m$ una misura* finita *su $\mathcal{S}$. Se* per ogni *successione $(Y_r)$ di elementi di $\mathcal{S}$ "decrescente all'insieme vuoto", ossia tale che*

$$Y_{r+1} \subseteq Y_r\,, \qquad \bigcap_{r=1}^{+\infty} Y_r = \emptyset\,,$$

*vale*

$$\lim m(Y_r) = 0 = m(\emptyset)\,,$$

*allora la misura è $\sigma$-additiva.*

**Dim.** Dal Teorema 12 si sa:

1. $m(\emptyset) = 0$ perché la misura è finita;
2. $m(Y_{r+1}) \leq m(Y_r)$ perché $Y_{r+1} \subseteq Y_r$.

Dobbiamo provare:

$$\text{se } \begin{cases} A_r \in \mathcal{S}\,, \ A_r \cap A_j = \emptyset \\ A = \bigcup_{r=1}^{+\infty} A_r \in \mathcal{S} \end{cases} \qquad \text{allora} \quad m(A) = \sum_{r=1}^{+\infty} m(A_r)\,.$$

Introduciamo per questo gli insiemi

$$X_k = \bigcup_{r=1}^{k} A_r \quad \text{così che } A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} X_k\,.$$

Vale

$$A = X_k \cup [A - X_k]\,, \text{ e quindi } m(A) = m(X_k) + m(A - X_k) \tag{1.2}$$

perché $X_k \cap [A - X_k] = \emptyset$.

Dalla definizione degli $X_k$ si vede che:

$$Y_{k+1} = A - X_{k+1} \subseteq A - X_k = Y_k\,, \qquad \bigcap_{k=1}^{+\infty} Y_k = \bigcap_{k=1}^{+\infty} [A - X_k] = A - \bigcup_{k=1}^{+\infty} X_k = \emptyset\,.$$

Dunque, per ipotesi,

$$\lim m(Y_k) = \lim m(A - X_k) = 0\,.$$

La proprietà di additività della misura mostra che

$$m(X_k) = \sum_{r=1}^{k} m(A_r)$$

e la successione

$$k \to \sum_{r=1}^{k} m(A_r)$$

cresce e quindi ammette limite. Dunque, da (1.2),

$$m(A) = \lim [m(X_k) + m(A - X_k)] = \lim m(X_k) + \lim_k m(A - X_k)$$
$$= \lim m(X_k) = \sum_{r=1}^{+\infty} m(A_r) \,.$$

Ciò è quanto volevamo provare. ∎

Il risultato precedente può invertirsi, ottenendo una proprietà di "continuità" delle misure $\sigma$–additive.

**Teorema 14** *Sia $\mathcal{S}$ un anello di insiemi. Sia $(A_r)$ una successione* crescente *e sia $(B_r)$ una successione* decrescente *di elementi di $\mathcal{S}$. Sia rispettivamente*

$$A = \bigcup_{r=1}^{+\infty} A_r \,, \qquad B = \bigcap_{r=1}^{+\infty} B_r \,.$$

*Sia $m$ una misura $\sigma$-additiva su $\mathcal{S}$. Allora*

$$m(A) = \lim_r m(A_r) \,.$$

*Se inoltre $m(B_1) < +\infty$ si ha:*

$$m(B) = \lim_r m(B_r) \,.$$

**Dim.** Proviamo prima di tutto l'asserto per il caso delle successioni crescenti di insiemi. Introduciamo gli insiemi

$$\hat{A}_1 = A_1 \,, \quad \hat{A}_{k+1} = A_{k+1} - A_k \,.$$

Gli insiemi $\hat{A}_k$ sono due a due disgiunti perché la successione $(A_k)$ è crescente e

$$A_k = \bigcup_{r=1}^{k} \hat{A}_r \quad \Longrightarrow \quad A = \bigcup_{r=1}^{+\infty} \hat{A}_r \,.$$

Essendo gli $\hat{A}_r$ due a due disgiunti,

$$m(A_k) = \sum_{r=1}^{k} m(\hat{A}_r) \,,$$
$$m(A) = \sum_{r=1}^{+\infty} m(\hat{A}_r) = \lim_k \sum_{r=1}^{k} m(\hat{A}_r) = \lim_k m(A_k) \,.$$

Ciò è quanto volevamo provare.

Si noti che non si esclude che la misura di $A$ sia $+\infty$.

La dimostrazione della seconda parte del teorema discende dalla prima: si definisca

$$A_k = B_1 - B_k \quad \Longrightarrow \quad m(A_k) = m(B_1) - m(B_k)\,.$$

Si noti che l'ultima uguaglianza vale perché $B_k \subseteq B_1$ e quindi $m(B_k) \leq m(B_1) < +\infty$.

La successione di insiemi $(A_k)$ è crescente e quindi

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{+\infty} [B_1 - B_k] = B_1 - \bigcap_{k=1}^{+\infty} B_k = B_1 - B\,.$$

Dunque, per la parte già provata del teorema,

$$\begin{aligned} m(B_1) - m(B) = m(B_1 - B) = \lim m(A_k) &= \lim_k [m(B_1) - m(B_k)] \\ &= m(B_1) - \lim m(B_k)\,. \end{aligned}$$

Usando nuovamente $m(B_1) < +\infty$ e semplificando $m(B_1)$ si trova $m(B) = \lim m(B_k)$. Ciò completa la dimostrazione. ∎

**Osservazione 15** L'ipotesi che la misura sia finita non è richiesta nel caso delle successioni crescenti. Nel caso delle successioni decrescenti può sostituirsi con la condizione che, per un opportuno $k$, sia $m(B_k) < +\infty$. Una condizione di questo tipo è comunque essenziale e non può eliminarsi nel caso delle successioni di insiemi decrescenti. Infatti, se $\Omega = \mathbb{R}$ e se $B_k = [k, +\infty)$ allora $m(B_k) = +\infty$ per ogni $r$ mentre $m(\cap B_k) = m(\emptyset) = 0$.

Vedremo che la misura che è $+\infty$ su $B_k$ e che è zero su $\emptyset$ è la misura di Lebesgue di tali insiemi, e proveremo che la misura di Lebesgue è $\sigma$–additiva. Dunque la condizione che gli insiemi abbiano misura finita non si può rimuovere dal secondo enunciato del Teorema 14. ∎

## 1.3 La misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$

Introduciamo ora la misura di Lebesgue su una opportuna $\sigma$-algebra di insiemi di $\mathbb{R}^n$. Procediamo in due passi. Prima di tutto introduciamo una misura, che vedremo essere $\sigma$-additiva, sull'anello degli insiemi semplici. Nel secondo passo estenderemo questa misura ad una $\sigma$-algebra che sarà la $\sigma$-algebra degli "insiemi misurabili secondo Lebesgue".

### 1.3.1 Una misura $\sigma$-additiva su $\mathbb{R}^n$

Consideriamo gli insiemi elementari contenuti in un dato insieme elementare $J \subseteq \mathbb{R}^n$, definiti al paragrafo 1.2.2. Definiamo

$$m(\emptyset) = 0\,, \qquad m\left(\prod_{i=1}^{n}[x_i, y_i)\right) = \prod_{i=1}^{n}(y_i - x_i)\,. \tag{1.3}$$

Estendiamo quindi questa misura all'algebra $\mathcal{S}$ delle unioni finite di insiemi elementari, ossia all'algebra degli insiemi semplici contenuti in $J$, imponendo

$$m(I_1 \cup I_2) = m(I_1) + m(I_2) \qquad \text{se} \quad I_1 \cap I_2 = \emptyset\,. \tag{1.4}$$

**Osservazione 16** Si noti che uno stesso insieme semplice può rappresentarsi in più modi come unione di insiemi elementari disgiunti:

$$[0, 1) = [0, 1/2) \cup [1/2, 1)\,.$$

Se $n = 1$ è facile provare che *il valore che $m$ associa ad un insieme non dipende dal modo con cui esso si rappresenta.* Lo stesso vale in dimensione maggiore di 1, ma la dimostrazione è macchinosa. ∎

Vogliamo provare che la misura $m$ che abbiamo introdotta è $\sigma$-additiva:

**Teorema 17** *La misura definita da (1.3) e da (1.4) è $\sigma$-additiva.*

**<u>Dim</u>.** La misura è finita perché $m(J) < +\infty$. Possiamo quindi applicare il Teorema 13 e provare che *per ogni* successione di insiemi semplici decrescente a $\emptyset$, la successione delle misure converge a $0$:

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k = \emptyset \Longrightarrow \lim m(A_k) = 0\,.$$

Si noti che la successione $\{m(A_k)\}$ decresce. Sia per assurdo

$$m(A_k) > \alpha > 0 \qquad \forall k\,.$$

Fissiamo $\epsilon \in (0, \alpha/4)$.

Sia $k = 1$ e consideriamo l'insieme semplice $A_1$ (si ricordi che $A_1 \supseteq A_2$). Possiamo rappresentarlo come unione *finita* di insiemi elementari disgiunti,

ciascuno della forma $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i)$. Sostituendo ciascuno insieme elementare $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i)$ con un insieme elementare $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i - \sigma)$ si trova ancora un insieme elementare, diciamo $J_1$, e si può scegliere $\sigma > 0$ così piccolo che valgano ambedue le disuguaglianze seguenti:

$$m(J_1) > \alpha - \epsilon\,, \quad m(J_1 \cap A_2) > \alpha - \epsilon\,.$$

Inoltre,

$$J_1 \subseteq \overline{J}_1 \subseteq A_1\,.$$

L'insieme $J_1 \cap A_2$ è ancora un insieme semplice. Indichiamolo col simbolo $\hat{A}_2$,

$$\hat{A}_2 = J_1 \cap A_2 \quad \text{così che } m(\hat{A}_2) > \alpha - \epsilon\,.$$

Ripetiamo la stessa costruzione, ma a partire dall'insieme $\hat{A}_2$ e con $\epsilon/2$ al posto di $\epsilon$. Si costruisce un insieme $J_2$ tale che

$$\begin{aligned} &J_2 \subseteq \overline{J}_2 \subseteq \hat{A}_2 \subseteq A_2\,, \qquad m(J_2 \cap A_3) > (\alpha - \epsilon) - \epsilon/2\,,\\ &m(J_2) \geq \alpha - (\epsilon + \epsilon/2)\,. \end{aligned}$$

Si noti che $\overline{J}_2$, essendo contenuto in $\hat{A}_2$, è sia s.insieme di $A_2$ che di $\overline{J}_1$.

Iterando questa costruzione, si trova una successione $(J_k)$ con queste proprietà:

**i)** $J_k \subseteq \overline{J}_k \subseteq A_k$;

**ii)** $J_k \subseteq A_1$ per ogni $k$, e quindi gli insiemi $J_k$ sono limitati;

**iii)** $\overline{J}_k \subseteq \overline{J}_{k-1}$;

**iv)** $m(J_k) \geq m(J_k \cap A_{k+1}) > \alpha - \left(\sum_{i=1}^k \epsilon/2^k\right) > \alpha - \epsilon > 0$ e quindi nessuno dei $J_k$ è vuoto così che si ha anche $\overline{J}_k \neq \emptyset$ per ogni $k$.

Grazie alle proprietà **ii)**–**iv)**, segue dal teorema di Cantor che gli insiemi $\overline{J}_k$ hanno un punto comune $x_0$ che, per la proprietà **i)** appartiene a ciascuno degli $A_k$. Ciò contrasta con l'ipotesi. La contraddizione trovata mostra che deve aversi

$$\lim m(A_k) = 0\,.$$

Dunque, la misura è $\sigma$-additiva. ∎

Estendiamo ora la famiglia degli insiemi cui si può attribuire una misura. Consideriamo prima di tutto il caso degli insiemi limitati. Poi estenderemo la definizione della misura ad insiemi illimitati.

### 1.3.2 Insiemi limitati e misurabili secondo Lebesgue

Fissiamo un insieme elementare $Q$ e lavoriamo ora soltanto con suoi s.insiemi. A ciascun insieme $A \subseteq Q$ associamo un numero che si chiama la sua MISURA ESTERNA, in simboli $m^*(A)$, come segue:

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum m(R_j),\ R_j \text{ elementare, } \bigcup_{i \geq 1} R_j \supseteq A \right\} .$$

Nella definizione precedente, l'insieme degli $R_j$ può essere finito o numerabile.

Si nota immediatamente che se $S$ è un insieme elementare, e quindi anche se è un insieme semplice, allora

$$m^*(S) = m(S) .$$

Ovviamente:

**Corollario 18** *Se $A \subseteq B$ allora $m^*(A) \leq m^*(B)$.*

La funzione $m^*$ è quindi una FUNZIONE MONOTONA di insieme, che però *non* è una misura perché *non è additiva.* Per essa vale solamente:

**Teorema 19** *La funzione $m^*$ è SUBADDITIVA; ossia per ogni famiglia $\{A_j\}$ finita o numerabile di s.insiemi di $Q$ e per ogni insieme $A$ tale che*

$$A \subseteq \bigcup_{j \geq 1} A_j$$

*vale*

$$m^*(A) \leq \sum_{j \geq 1} m^*(A_j) . \tag{1.5}$$

**Dim.** Si fissi $\epsilon > 0$. Sia $\{R_i^{(j)}\}$ una famiglia finita o numerabile di insiemi elementari per cui

$$A_j \subseteq \bigcup_{i \geq 1} R_i^{(j)} \qquad \sum_{i \geq 1} m(R_i^{(j)}) \leq m^*(A_j) + \epsilon/2^j .$$

Essendo

$$A \subseteq \bigcup_{j>1} \bigcup_{i \geq 1} R_i^{(j)} ,$$

segue

$$m^*(A) \le \sum_{j\ge1}\sum_{i\ge1} m(R_i^{(j)}) \le \sum_{j\ge1}\left[m^*(A_j)+\frac{\epsilon}{2^j}\right] \le \epsilon + \sum_{j\ge1} m^*(A_j)\,.$$

L'asserto segue perché questa disuguaglianza vale per ogni $\epsilon$. ∎

**Osservazione 20** In generale, la disuguaglianza in (1.5) è stretta, anche se gli $A_j$ sono due a due disgiunti. ∎

**Lemma 21** *Per ogni coppia di insiemi $A$ e $B$ si ha*

$$|m^*(A) - m^*(B)| \le m^*(A\triangle B)\,. \tag{1.6}$$

**Dim.** Vanno provate le due disuguaglianze

$$-m^*(A\triangle B) \le m^*(A) - m^*(B) \le m^*(A\triangle B)\,.$$

Queste sono ambedue conseguenza della subadditività di $m^*$. Infatti,

$$A \subseteq B\cup(A\triangle B) \implies m^*(A) \le m^*(B) + m^*(A\triangle B)$$
ossia $m^*(A) - m^*(B) \le m^*(A\triangle B)$;
$$B \subseteq A\cup(A\triangle B) \implies m^*(B) \le m^*(A) + m^*(A\triangle B)$$
ossia $m^*(B) - m^*(A) \le m^*(A\triangle B)$. ∎

Definiamo ora la famiglia degli insiemi misurabili secondo Lebesgue e che sono contenuti in un fissato insieme elementare $Q$.

**Definitione 22** Sia $Q$ un insieme elementare. Indichiamo col simbolo $\mathcal{L}$ la famiglia dei s.insiemi di $Q$ con questa proprietà: $A \in \mathcal{L}$ se *per ogni* $\epsilon > 0$ esiste un *insieme semplice* $I_\epsilon$ tale che

$$m^*(A\triangle I_\epsilon) < \epsilon\,.$$

Si noti che $Q \in \mathcal{L}$.

Gli insiemi di $\mathcal{L}$ si dicono MISURABILI SECONDO LEBESGUE.

*Si osservi il procedimento che abbiamo fatto: si è usato $m^*$ per definire una "misura da sopra" che permetta di valutare quanto bene un dato insieme $A$ si possa approssimare con insiemi semplici. Gli insiemi misurabili secondo Lebesgue sono quelli che si approssimano tanto bene quanto si vuole con insiemi semplici.*

Proveremo che $\mathcal{L}$ è una $\sigma$-algebra. Nel fare ciò *introdurremo* anche una *misura* $\sigma$-additiva $\lambda$ su $\mathcal{L}$, che estende $m$, e che si chiama la misura di Lebesgue.

**Definitione 23** La misura $\lambda$ è la restrizione di $m^*$ alla famiglia di insiemi $\mathcal{L}$. La misura $\lambda$ si chiama MISURA DI LEBESGUE.

Ovviamente, dobbiamo ancora provare che $\mathcal{L}$ è una $\sigma$-algebra e che $\lambda$ è effettivamente una misura e che inoltre è $\sigma$-additiva. Per ora sappiamo solamente che $\lambda$ è subadditiva; ossia sappiamo che se $(A_n)$ è una successione di elementi di $\mathcal{L}$ e se $A \in \mathcal{L}$ è contenuto nell'unione degli $A_n$ allora si ha

$$\lambda(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(A_n)\,. \tag{1.7}$$

Proveremo che $\mathcal{L}$ è una $\sigma$-algebra e che $\lambda$ è una misura $\sigma$-additiva procedendo in vari passi. Proviamo prima di tutto che $\mathcal{L}$ è un'algebra di insiemi. Ricordiamo che stiamo lavorando con sottoinsiemi di un fissato insieme elementare $Q$. Dunque, $\tilde{A} = Q - A$ per ogni $A \subseteq Q$.

**Teorema 24** *Ricordiamo che abbiamo fissato un insieme $Q$ e che $\mathcal{L}$ è una famiglia di sottoinsiemi di $Q$. Valgono le due proprietà seguenti:*

1. *Se $A \in \mathcal{L}$ allora $\tilde{A} = Q - A \in \mathcal{L}$;*
2. *siano $A$, $B$ in $\mathcal{L}$. Allora, $A \cup B \in \mathcal{L}$.*

*Dunque, per il Teorema 6, $\mathcal{L}$ è un'algebra di sottoinsiemi di $Q$.*

**Dim.** Proviamo la prima proprietà. Sia $\epsilon > 0$ e sia $R \subseteq Q$ un insieme semplice tale che

$$m^*(A \triangle R) < \epsilon\,.$$

Si noti che

$$(Q - A) \triangle (Q - R) = A \triangle R\,.$$

Dunque,

$$m^*((Q-A)\triangle(Q-R)) < \epsilon\,.$$

Ora, $\hat{R} = Q - R$ è ancora un insieme semplice e quindi per ogni $\epsilon > 0$ si trova un insieme semplice $\hat{R}$ per cui

$$m^*\left((Q-A)\triangle\hat{R}\right) < \epsilon\,;$$

ossia, $Q - A \in \mathcal{L}$.

Proviamo ora la seconda proprietà. Sia $\epsilon > 0$ e siano $R_A$ ed $R_B$ insiemi semplici e tali che

$$m^*(A\triangle R_A) < \epsilon/2\,, \qquad m^*(B\triangle R_B) < \epsilon/2\,.$$

Notiamo che $R_A \cup R_B$ è ancora un insieme semplice e che

$$(A\cup B)\triangle(R_A\cup R_B) \subseteq (A\triangle R_A)\cup(B\triangle R_B)\,.$$

La subadditività della misura esterna mostra che

$$m^*\left((A\cup B)\triangle(R_A\cup R_B)\right) < \epsilon\,.$$

Dunque, $A \cup B \in \mathcal{L}$. ∎

Si è così provato che $\mathcal{L}$ è un'algebra di insiemi. Come si è detto, su $\mathcal{L}$ definiamo la funzione

$$\lambda(A) = m^*(A)$$

che si chiama la MISURA DI LEBESGUE. Mostreremo che questa è una misura $\sigma$-additiva. Mostriamo prima di tutto l'additività. Per questo abbiamo bisogno di un lemma:

**Lemma 25** *Siano $A$ e $B$ due insiemi* disgiunti. *Siano $R$ ed $S$ insiemi* qualsiasi. *Si ha:*

$$R\cap S \subseteq (B\triangle S)\cup(A\triangle R). \tag{1.8}$$

**Dim.** Scriviamo

$$R\cap S = \left[(R\cap A)\cup(R\cap\tilde{A})\right]\cap S\,.$$

Essendo $A$ e $B$ *disgiunti*, si ha $A \subseteq \tilde{B}$ e quindi la precedente si completa come segue:

$$\begin{aligned} R \cap S &= \left[(R \cap A) \cup (R \cap \tilde{A})\right] \cap S \subseteq \left[(R \cap \tilde{B}) \cup (R \cap \tilde{A})\right] \cap S \\ &\subseteq \left[(S \cap \tilde{B}) \cap R\right] \cup \left[(R \cap \tilde{A}) \cap S\right] \subseteq [(S \triangle B) \cap R] \cup [(R \triangle A) \cap S] \\ &\subseteq (S \triangle B) \cup (R \triangle A)\,. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Proviamo ora:

**Teorema 26** *La funzione di insieme $\lambda$, definita su $\mathcal{L}$, è una misura.*

**Dim.** Sapendo già che $\lambda$ è subadditiva, si veda la (1.7), basta provare che

$$\text{se } A \cap B = \emptyset \text{ allora si ha } \lambda(A \cup B) \geq \lambda(A) + \lambda(B)$$

ossia va provato che:

$$\begin{cases} A \text{ e } B \text{ in } \mathcal{L}\,, \\ A \cap B = \emptyset \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad m^*(A \cup B) \geq m^*(A) + m^*(B)$$

perché $\lambda$ è la restrizione di $m^*$ a $\mathcal{L}$.

Fissiamo $\epsilon > 0$ e due insiemi semplici, $R$ ed $S$, taliche

$$m^*(A \triangle R) < \epsilon\,, \qquad m^*(B \triangle S) < \epsilon\,.$$

La (1.6) implica che

$$m(R) = m^*(R) \geq m^*(A) - \epsilon\,, \qquad m(S) = m^*(S) \geq m^*(B) - \epsilon\,. \tag{1.9}$$

L'idea della dimostrazione è di provare che

$$m^*(A \cup B) \sim m^*(R \cup S)\,, \qquad m^*(R \cup S) = m(R \cup S) \sim m(R) + m(S)$$

stimando esplicitamente sia lo scarto $|m^*(A \cup B) - m^*(R \cup S)|$ che lo scarto $|m(R \cup S) - (m(R) + m(S))|$.

Stimiamo prima di tutto lo scarto $|m^*(A \cup B) - m^*(R \cup S)|$. Notiamo che

$$(A \cup B) \triangle (R \cup S) \subseteq (A \triangle R) \cup (B \triangle S)\,.$$

Combiniamo questa con la (1.6). Si ha

$$|m^*(A \cup B) - m^*(R \cup S)| \leq m^*\left((A \cup B) \triangle (R \cup S)\right) \leq m^*(A \triangle R) + m^*(B \triangle S) \leq 2\epsilon\,.$$

Dunque,

$$m^*(A \cup B) \geq m(R \cup S) - 2\epsilon\,. \tag{1.10}$$

Stimiamo ora lo scarto $|m(R \cup S) - (m(R) + m(S))|$. Per questo usiamo il Lemma 25 e quindi il fatto che $A$ e $B$ sono *disgiunti.* Dalla (1.8) e per la subadditività di $m^*$ si ha

$$m(R \cap S) \leq m^*(R \cap S) \leq m^*(A \triangle R) + m^*(B \triangle S) \leq 2\epsilon\,.$$

D'altra parte, $m$ è additiva su $\mathcal{S}$ e quindi, dal Teorema 12,

$$m(R \cup S) = m(R) + m(S) - m(R \cap S) \geq m(R) + m(S) - 2\epsilon\,. \tag{1.11}$$

Combinando (1.9), (1.10) e (1.11) si trova

$$m^*(A \cup B) \geq m(R \cup S) - 2\epsilon \geq m(R) + m(S) - 4\epsilon \geq m^*(A) + m^*(B) - 6\epsilon\,.$$

La disuguaglianza che volevamo provare segue perché $\epsilon > 0$ è arbitrario. ∎

Proviamo ora:

**Teorema 27** *L'algebra di insiemi $\mathcal{L}$ è una $\sigma$-algebra.*

**Dim.** Sia $(A_n)$ una successione in $\mathcal{L}$. Dobbiamo provare che $\cup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{L}$. Mostriamo prima di tutto che non è restrittivo assumere che gli $A_n$ siano due a due disgiunti. Definiamo per questo

$$B_1 = A_1\,, \quad B_n = A_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\,.$$

Ciascuno degli insiemi $B_n$ è in $\mathcal{L}$, perché $\mathcal{L}$ è un'algebra di insiemi; e i $B_n$ sono due a due disgiunti. Inoltre,

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\,.$$

Dunque, eventualmente sostituendo ciascun $A_n$ col corrispondente $B_n$, si suppone da ora in poi che gli $A_n$ siano due a due disgiunti.

Si è visto che $\lambda$ su $\mathcal{L}$ è una misura e quindi

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda(A_k) = \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_k\right) = m^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_k\right) \leq m^*\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_k\right) \leq \lambda(Q)\,.$$

Ciò prova che la serie $\sum_{k=1}^{n} \lambda(A_k)$ converge.

Fissiamo ora $\epsilon > 0$ e sia $N_\epsilon$ tale che

$$\sum_{k=N_\epsilon}^{+\infty} \lambda(A_k) < \epsilon/2 \,.$$

Essendo $\mathcal{L}$ un'algebra,

$$\bigcup_{k=1}^{N_\epsilon - 1} A_k \in \mathcal{L}$$

e quindi esiste un insieme semplice $R$ per cui

$$m^*\left(\left[\bigcup_{k=1}^{N_\epsilon - 1} A_k\right] \triangle R\right) < \epsilon/2 \,.$$

Ora,

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \triangle R \subseteq \left[\left(\bigcup_{k=1}^{N_\epsilon - 1} A_k\right) \triangle R\right] \bigcup \left[\bigcup_{k=N_\epsilon}^{+\infty} A_k\right] \,.$$

Dunque,

$$m^*\left(\left[\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right] \triangle R\right) \le \frac{\epsilon}{2} + m^*\left(\bigcup_{k=N_\epsilon}^{+\infty} A_k\right)$$

$$\le \frac{\epsilon}{2} + \sum_{k=N_\epsilon}^{+\infty} m^*(A_k) \le \frac{\epsilon}{2} + \sum_{k=N_\epsilon}^{+\infty} \lambda(A_k) < \epsilon \,.$$

Dunque,

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{L} \,. \quad \blacksquare$$

Sappiamo ora che $\mathcal{L}$ è una $\sigma$-algebra. Completiamo questi argomenti provando:

**Teorema 28** *La misura di Lebesgue $\lambda$ è $\sigma$-additiva.*

**Dim.** Sia $A_n$ una successione di insiemi due a due disgiunti di $\mathcal{L}$. Si vuol provare

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(A_n) \,.$$

Si sa già che $\lambda$ è additiva e quindi per ogni $N$ vale

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda(A_n) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \le \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right).$$

Dunque,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(A_n) \le \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right).$$

Dobbiamo provare l'uguaglianza ossia che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(A_n) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right).$$

Ciò discende dal fatto che $\lambda = m^*$ e dal fatto che $m^*$ è subadditiva. Si ha quindi:

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda(A_n) \le \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = m^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(A_n).$$

Al limite per $N \to +\infty$ si trova

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(A_n) \le \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(A_n). \quad \blacksquare$$

**Osservazione 29** Va notato:

1. Sia $\chi_A(x)$ la funzione caratteristica di $A$. Ricordiamo che la funzione caratteristica di un insieme $A$ prende valore $1$ sull'insieme e $0$ sul suo complementare. Se la funzione caratteristica di $A$ è integrabile secondo Riemann allora l'insieme è misurabile

2. Chiaramente, $\mathcal{L}$ è una $\sigma$-algebra che contiene tutti gli insiemi semplici, e quindi $\mathcal{L}$ contiene la $\sigma$-algebra dei boreliani. L'inclusione è propria. ∎

### 1.3.3 Insiemi illimitati

Vogliamo ora estendere la definizione di misura di Lebesgue includendo anche insiemi illimitati. Per questo dovremo permettere alla misura di prendere il valore $+\infty$.

Introduciamo gli insiemi elementari

$$Q_N = \{x = (x_1\,, \dots x_n) \;:\; -N \leq x_j < N\}$$

Diciamo che $A$ è MISURABILE SECONDO LEBESGUE se $A \cap Q_N$ è misurabile per ogni $N$.

E' facile provare che la famiglia degli insiemi misurabili secondo Lebesgue è una $\sigma$-algebra e che la MISURA DI LEBESGUE

$$\lambda(A) = \lim_{N \to +\infty} \lambda\left(A \cap Q_N\right)$$

è $\sigma$-additiva.

## 1.4 Insiemi nulli e proprietà che valgono quasi ovunque

Sia $A$ un insieme con questa proprietà: per ogni $\epsilon > 0$ esistono insiemi semplici $R_n$ tali che

$$A \subseteq \bigcup_{n \geq 1} R_n\,, \qquad \sum_{n \geq 1} m(R_n) < \epsilon\,.$$

Un insieme con questa proprietà si è chiamato un INSIEME NULLO.
Ovviamente:

- ogni insieme nullo è misurabile secondo Lebesgue e la sua misura di Lebesgue è $0$ e viceversa;

- ogni s.insieme di un insieme nullo è un insieme nullo.

Gli insiemi nulli sono quindi “invisibili” per la misura di Lebesgue. Questo suggerisce di dire che una proprietà che vale in tutti i punti di un insieme $\Omega$, salvo che in quelli di un insieme nullo, vale QUASI OVUNQUE su $\Omega$ e si scrive brevemente che essa vale q.o. $\Omega$. Per esempio diremo che una funzione è *continua q.o. su* $\Omega$ se l'insieme dei suoi punti di discontinuità è un insieme nullo.

**Osservazione 30** Naturalmente esistono anche dei boreliani che hanno misura nulla; ma un boreliano che ha misura nulla può contenere dei s.insiemi che *non* sono boreliani. Si chiama COMPLETA una misura per la quale ogni s.insieme di un insieme di misura zero è misurabile (e quindi ha misura zero). La misura di Lebesgue definita su $\mathcal{L}$ è completa mentre la sua restrizione ai boreliani non lo è. ∎

Si vede facilmente che ogni insieme costituito da un solo punto è nullo. La $\sigma$-additività della misura implica che ogni unione numerabile di insiemi nulli è un insieme nullo. In particolare, l'insieme dei razionali è nullo. E' interessante provare ciò direttamente:

**Esempio 31** Sia $(q_n)$ la successione dei razionali in $[0,1]$. Fissiamo $\epsilon > 0$ ed associamo a $q_n$ l'intervallo

$$R_n = \left( q_n - \frac{\epsilon}{2^n}, q_n + \frac{\epsilon}{2^n} \right) .$$

Chiaramente, l'unione degli $R_n$ contiene i razionali di $[0,1]$ e $\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda(R_n) < \epsilon$. Dunque, l'insieme dei razionali di $[0,1]$ è un insieme nullo. ∎

E' bene sapere che esistono anche insiemi non numerabili che sono nulli. Per esempio, è un insieme nullo l'insieme di Cantor[2]. Ciò si vede facilmente notando che la somma degli intervalli che si tolgono nella costruzione dell'insieme di Cantor, ossia la misura del complementare in $[0,1]$ dell'insieme di Cantor, vale $1$.

Ricordiamo infine che il concetto di insieme nullo (in $\mathbb{R}$) si è già incontrato nell'enunciato del teorema di Riemann-Lebesgue.

Enunciamo ora formalmente un'osservazione già fatta, ed una sua conseguenza:

[2]ricordiamo la costruzione dell'insieme di Cantor in $[0,1]$, che si fa per passi: al primo passo si divide $I_1 = [0,1]$ in tre sottointervalli di ugual lunghezza (ciscuno di lunghezza $1/3$ quindi) e si toglie l'intervallo centrale che chiamiamo $J_1$. L'insieme rimanente, unione di due intervalli, si chiama $I_2$. Ciascuno degli intervalli di $I_2$ si divide in tre parti uguali e da ciscun intervallo si toglie l'intervallo centrale. Sia $J_2$ l'unione degli intervalli tolti e $I_3$ la parte rimanente. Al passo $k$-mo si ha una unione $I_k$ di intervalli tutti della medesima lunghezza. Ciscuno di essi si divide in tre parti uguali e da ciscuno di essi si toglie quello centrale. Si indica con $I_{k+1}$ la parte rimanente di $I_k$ e con $J_k$ l'unione degli intervalli tolti. L'insieme di Cantor è $\cap I_k = [0,1] - (\cup J_k)$. Si prova che l'insieme di Cantor è infinito non numerabile.

**Teorema 32** *Sia $(A_n)$ una successione di s.insiemi di $\Omega$:*

1. *se $\lambda(A_n) = 0$ per ogni $n$ allora $\lambda(\cup A_n) = 0$;*
2. *se per ogni $n$ vale $\lambda(A_n) = \lambda(\Omega) < +\infty$ allora $\lambda(\cap A_n) = \lambda(\Omega)$.*

**Dim.** La prima proprietà si è già notata, e discende dalla $\sigma$-additività della misura. La seconda immediatamente discende dalla prima, passando ai complementari[3]. Infatti, essendo $\Omega$ di misura finita, $\lambda(\tilde{A}_n) = 0$ e quindi

$$\lambda\left(\bigcup \tilde{A}_n\right) = 0 \qquad \text{ossia} \qquad \lambda(\Omega) = \lambda\left(\widetilde{\bigcup \tilde{A}_n}\right).$$

D'altra parte si ha

$$\widetilde{\bigcup \tilde{A}_n} = \cap A_n$$

e quindi

$$\lambda(\Omega) = \lambda\left(\widetilde{\bigcup \tilde{A}_n}\right) = \lambda\left(\bigcap A_n\right) . \blacksquare$$

L'esempio $\Omega = [0, +\infty)$, $A_n = [n, +\infty)$ mostra che la condizione $\lambda(\Omega) < +\infty$ non si può rimuovere dall'ultimo enunciato.

[3] si ricordi che la tilde indica il complementare.

## 1.5 Funzioni misurabili

Da ora in poi, con "misura" intenderemo sempre la misura di Lebesgue.
Definita la misura di Lebesgue, si potrà introdurre l'integrale di Lebesgue.

Prima di tutto si definisce la classe delle FUNZIONI MISURABILI. Una funzione $f(x)$ su $\mathbb{R}^n$ si dice misurabile quando per ogni $r$ è misurabile l'insieme

$$\{x \mid f(x) > r\}.$$

E' immediato mostrare che una funzione è misurabile se e solo se sono misurabili gli insiemi

$$\{x \mid f(x) \geq r\} \qquad \text{oppure} \qquad \{x \mid f(x) \leq r\} \qquad \text{oppure} \qquad \{x \mid f(x) < r\}\,.$$

E' facile mostrare che *una funzione $f(x)$ è misurabile se e solo se antitrasforma* boreliani *in insiemi che sono misurabili secondo Lebesgue*[4].

Dunque:

**Teorema 33** *Sia $f$ una funzione misurabile. Allora $|f|$ è misurabile.*

**Dim.** Infatti,

$$|f(x)| \geq c \qquad \text{quando} \qquad \begin{cases} f(x) \geq c \\ \text{oppure} \\ f(x) \leq -c \end{cases}$$

e quindi l'insieme degli $x$ per cui $|f(x)| \geq c$ è l'unione di due insiemi misurabili e quindi è misurabile. ∎

Si prova inoltre:

**Teorema 34** *Sia $(f_n(x))$ una successione di funzioni misurabili e siano*

$$\phi(x) = \sup_n\{f_n(x)\}\,, \qquad \psi(x) = \inf_n\{f_n(x)\}\,.$$

*Ambedue le funzioni $\phi(x)$ e $\psi(x)$ sono misurabili.*

**Dim.** Proviamo l'asserto per la funzione $\phi(x)$. Fissiamo $r \in \mathbb{R}$ e consideriamo

$$X_r = \{x \mid \phi(x) > r\}\,.$$

---

[4] va detto esplicitamente che insiemi solamente misurabili secondo Lebesgue potrebbero venir antitrasformati in insiemi che misurabili non sono.

Si ha $x \in X_r$ se e solo se esiste $n$ tale che $f_n(x) > r$. Dunque,

$$X_r = \bigcup_n \{x \mid f_n(x) > r\}.$$

L'insieme $X_r$ è misurabile come unione di insiemi misurabili.

Proviamo ora l'asserto per la funzione $\psi(x)$. Si potrebbe fare una dimostrazione ugualmente semplice studiando gli insiemi su cui $\psi(x)$ è *strettamente* minore di $r$. Seguiamo invece una via diversa.

Fissiamo $r \in \mathbb{R}$ e studiamo l'insieme

$$X_r = \{x \mid \psi(x) \geq r\}.$$

Si ha $x \in X_r$ quando *per ogni* $k$ *esiste* un indice $n = n(k,x)$ tale che $f_n(x) > r - 1/k$.

Un indice $n = n(k,x)$ per cui $f_n(x) > r - 1/k$ esiste se e solo se $x$ appartiene all'insieme

$$\bigcup_n \left\{x \mid f_n(x) \geq r - \frac{1}{k}\right\}.$$

Dunque,

$$X_r = \bigcap_k \bigcup_n \left\{x \mid f_n(x) \geq r - \frac{1}{k}\right\}.$$

Ciò mostra la misurabilità di $X_r$ e completa la dimostrazione. ∎

E' ora immediato dedurre:

**Teorema 35** *Sia* $(f_n(x))$ *una successione di funzioni misurabili e siano*

$$f(x) = \limsup f_n(x), \qquad g(x) = \liminf f_n(x).$$

*Le funzioni* $f(x)$ *e* $g(x)$ *sono misurabili.*

**Dim.** Proviamo che l'asserto vale per $f(x)$. L'asserto per $g(x)$ si prova in modo analogo. Sia quindi

$$f(x) = \limsup_n f_n(x).$$

Per definizione, $f(x) = \limsup_n f_n(x)$ vuol dire

$$f(x) = \lim_k \phi_k(x), \qquad \phi_k(x) = \sup_{n \geq k}\{f_n(x)\}.$$

Il Teorema 34 mostra che ciascuna delle $\phi_k(x)$ è misurabile.

Si osservi che la successione di funzioni $\{\phi_k(x)\}$ *decresce* e quindi ammette limite e

$$f(x) = \lim_k \phi_k(x) = \inf_k \phi_k(x) .$$

La misurabilità di $f(x)$ nuovamente discende dal Teorema 34. ∎

**Osservazione 36** Usando il fatto che l'unione numerabile di insiemi nulli è un insieme nullo si vede facilmente che i risultati precedenti valgono anche se le funzioni che vi intervengono sono solamente definite q.o. ∎

**Corollario 37** *Sia $(f_n(x))$ una successione di funzioni misurabili. Se il limite*

$$f(x) = \lim_n f_n(x)$$

*esiste q.o., allora $f(x)$ è misurabile.*

**Dim.** Infatti, se il limite esiste questo coincide sia con $\limsup f_n(x)$ che con $\liminf f_n(x)$, due funzioni la cui misurabilità si è già provata. ∎

**Osservazione 38** Si è già notato, e si prova facilmente, che se $B$ è un boreliano di $\mathbb{R}$ ed $f$ una funzione misurabile, allora $f^{-1}(B)$ è misurabile secondo Lebesgue. Invece, la contrimmagine di un insieme misurabile secondo Lebesgue può non essere misurabile secondo Lebesgue. Di conseguenza, *la composizione di funzioni misurabili non è generalmente una funzione misurabile.* Invece, $f(g(x))$ è misurabile se $f$ è misurabile secondo Lebesgue e $g$ è "misurabile secondo Borel", ossia antitrasforma boreliani in boreliani. E' questa una delle ragioni per cui l'introduzione della classe $\mathcal{L}$ degli insiemi misurabili secondo Lebesgue non permette di "dimenticare" i boreliani. ∎

Ricordiamo ora che *una funzione è continua se e solo se antitrasforma aperti in aperti.* Dunque:

**Teorema 39** *Ogni funzione continua antitrasforma boreliani in boreliani e in particolare è integrabile secondo Lebesgue.*

In realtà le funzioni misurabili secondo Lebesgue hanno relazioni assai profonde con le funzioni continue, espresse dai due teoremi seguenti, che non proviamo:

**Teorema 40 (**di LUSIN**)** *Sia $f$ una funzione misurabile su un insieme limitato $\Omega$. Per ogni $\epsilon > 0$ esiste un insieme* chiuso $F_\epsilon$ *tale che*

- $\lambda(\Omega - F_\epsilon) < \epsilon$*;*
- *la* restrizione *di $f$ ad $F_\epsilon$* è uniformemente continua.

**Osservazione 41** Una funzione misurabile può essere *ovunque* discontinua, come è il caso della funzione di Dirichlet. E' interessante vedere direttamente che la funione di Dirichlet su $[0,1]$ verifica la proprietà del teorema di Lusin. Per questo, introduciamo gli insiemi $R_n$ costruiti all'esempio 31. Questi sono aperti e quindi aperta è la loro unione. Sia $F_\epsilon$ il *complementare* di $\cup_{n\geq 1} R_n$. Allora, $\lambda(\,(0,1) - F_\epsilon) < \epsilon$ e la restrizione di $f$ ad $F_\epsilon$ è identicamente nulla perché $F_\epsilon$ non contiene razionali. Dunque, tale restrizione è uniformemente continua.

La funzione di Dirichlet stessa è invece *ovunque discontinua.* ∎

Un secondo teorema che lega le funzioni misurabili a concetti propri delle funzioni continue è:

**Teorema 42 (**di EGOROV-SEVERINI**)** *Sia $\Omega$ un insieme di misura finita e sia $(f_n)$ una successione di funzioni misurabili su $\Omega$, convergente q.o. ad una funzione $f$. Per ogni $\epsilon > 0$ esiste un insieme $F_\epsilon$ misurabile e tale che:*

- $\lambda(\Omega - F_\epsilon) < \epsilon$*,*
- *la restrizione ad $F_\epsilon$ delle funzioni $f_n$ è una successione di funzioni* uniformemente convergente *ad $f$.*

Le funzioni misurabili hanno anche una relazione importante con le funzioni a codominio finito.

Chiameremo FUNZIONE SEMPLICE una funzione della forma

$$s(x) = \sum_{j=1}^{r} a_j \chi_{A_j}(x) \tag{1.12}$$

dove gli $A_j$ sono insiemi misurabili secondo Lebesgue e $\chi_{A_j}$ è la funzione caratteristica di $A_j$. Si ricordi che la FUNZIONE CARATTERISTICA di un insieme $A$ è

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in A \\ 0 & \text{se} \quad x \notin A\,. \end{cases}$$

Dunque, *una funzione semplice è una funzione misurabile che ha codominio finito.*

Va notato che:

- gli insiemi $A_j$ in(1.12) non sono due a due disjunti. Quindi i valori della funzione non sono i numeri $a_j$;
- una medesima funzione semplice può rappresentarsi in più modi, mediante scelte diverse degli insiemi $A_j$ e dei coefficienti $a_j$, ma esiste una sola rappresentazione di $s(x)$ tale che i numeri $a_j$ siano due a due diversi. In tal caso:
  - gli insiemi $A_j$ sono due a due disgiunti;
  - i numeri $a_j$ sono i valori della funzione.

Vale:

**Teorema 43** *Sia $f$ una funzione misurabile. Esiste una successione di* funzioni semplici $(s_n)$ *convergente ad $f$. Tale successione non è unica ma se ne costruisce una con queste proprietà:*

- *la $(s_n)$ è una successione monotona crescente (oppure decrescente) ossia $s_{n+1}(x) \geq s_n(x)$ per ogni $x$.*
- *Se la funzione $f$ è limitata allora la convergenza è uniforme.*

**Dim.** Supponiamo prima di tutto che $f$ sia limitata,

$$-M \leq f(x) \leq M\,.$$

Dividiamo $[-M, M]$ con i punti

$$-M + k\frac{2M}{n}\,, \qquad 0 \leq k \leq n\,.$$

Sia quindi

$$A_{n,k} = \left\{x \mid f(x) \in \left[-M + k\frac{2M}{n}, -M + (k+1)\frac{2M}{n}\right)\right\}\,, \qquad 0 \leq k < n{-}1\,.$$

*Ciascuno degli $A_{n,k}$ è misurabile e inoltre questi insiemi sono due a due disgiunti.*

Definiamo $\tilde{s}_n$ ponendo

$$\tilde{s}_n(x) = -M + k\frac{2M}{n} \qquad x \in A_{n,k}$$

così che
$$0 \leq f(x) - \tilde{s}_n(x) \leq \frac{2M}{n}\,.$$
Si trova in questo modo una successione di funzioni semplici, $(\tilde{s}_n)$ *convergente uniformemente* ad $f$. Una successione $(s_n)$ di funzioni semplici uniformemente convergente ad $f(x)$ e che inoltre è *monotona,* ossia tale che
$s_n(x) \leq s_{n+1}(x) \leq f(x)$ si ottiene scegliendo
$$s_n(x) = \sup\{\tilde{s}_k(x) \mid k < n\}\,.$$

In modo analogo si costruisce una successione decrescente.
Se $f$ non è limitata, si costruisce prima la successione $(f_N)$,
$$f_N(x) = \left\{\begin{array}{lll} f(x) & \text{se} & -N \leq f(x) \leq N \\ -N & \text{se} & f(x) < -N \\ +N & \text{se} & f(x) > N\,. \end{array}\right.$$
La $(f_N)$ converge ad $f$, non uniformemente; si approssima ciascuna $f_N$ con una successione di funzioni semplici $(s_{n,N})$, come si è fatto sopra. E' facile costruire ora una successione che converge ad $f$ in ciascun punto.

La costruzione di una successione decrescente che approssima $f$ è analoga. ∎

**Osservazione 44** Si osservi che le rappresentazioni ottenute per ciascuna delle funzioni $\tilde{s}_n(x)$ ed $s_n(x)$ fanno intervenire insiemi due a due disgiunti e coefficienti due a due diversi. ∎

Segue:

**Teorema 45** *le operazioni algebriche applicate a funzioni misurabili producono funzioni misurabili.*

**Dim.** Si nota prima di tutto che le operazioni algebriche trasformano funzioni semplici in funzioni semplici.

Si approssimino le funzioni misurabili mediante funzioni semplici, si eseguano le operazioni e si usi il teorema 35. ∎

**Osservazione 46** Abbiamo visto che il valore assoluto di una funzione misurabile è misurabile. Il viceversa non vale perché *esistono insiemi che non sono misurabili secondo Lebesgue.* Se $A$ è uno di tali insiemi, la funzione $f(x) = 1$ su $A$, $f(x) = -1$ su $\tilde{A}$ non è misurabile, mentre $|f(x)|$ è misurabile, essendo identicamente $1$. ∎

# Capitolo 2

# Integrale di Lebesgue

Vogliamo ora definire l'integrale di Lebesgue. e studiarne le proprietà.

## 2.1 La definizione dell'integrale di Lebesgue

Il teorema 43 suggerisce di definire prima l'integrale delle funzioni semplici[1] e quindi l'integrale di una funzione misurabile $f$ come limite degli integrali delle funzioni semplici che la approssimano. Per evitare però di incontrare il simbolo $+\infty - \infty$, conviene seguire la via seguente: definito l'integrale delle funzioni semplici, prima si definisce l'integrale di funzioni positive e poi si estende la definizione al caso dell'integrale di generiche funzioni misurabili.

### 2.1.1 L'integrale delle funzioni semplici

Sia $s(x)$ una funzione semplice definita su un insieme (misurabile) $\Omega$. Dunque,

$$s(x) = \sum_{j=1}^{r} a_j \chi_{A_j}(x) \tag{2.1}$$

e gli insiemi $A_j$ sono misurabili.

Supponiamo $s(x) \geq 0$. Il suo INTEGRALE è definito da

$$\int_\Omega s(x)\,\mathsf{d}x = \sum_{j=1}^{r} a_j \lambda(A_j)\,.$$

[1] si ricordi che per definizione una funzione semplice è misurabile. Dunque il suo dominio è necessariamente un insieme misurabile.

**Osservazione 47** Va notato:

1. Una stessa funzione semplice può rappresentarsi in più modi. E' però vero che il valore dell'integrale non dipende dalla particolare rappresentazione usata per calcolarlo.

2. l'integrale non dipende dall'ordine degli addendi.

3. una funzione semplice ha una unica rappresentazione ottenuta imponendo che i coefficienti $a_j$ siano tra loro diversi. In tal caso gli insiemi $A_j$ sono due a due disgiunti e i coefficienti $a_j$ sono i valori della funzione. Lavorando con questa unica rappresentazione conviene riordinare gli addendi in modo che i coefficienti $a_j$ si susseguano in modo crescente: $a_j < a_{j+1}$

4. il valore dell'integrale non dipende dall'insieme su cui la funzione è nulla e non dipende da uno degli insiemi $A_j$ se questo ha misura nulla. Quando si lavora con funzioni non negative, spesso conviene introdurre $A_0 = \emptyset$ ed $a_0 = 0$ in modo da rappresentare la funzione $s(x)$ nella forma

$$s(x) = \sum_{j=0}^{r} a_j \chi_{A_j}(x) \,, \qquad \begin{cases} a_{j+1} > a_j & \text{se} \quad j \geq 1 \\ A_j \cap A_k = \emptyset & \text{se} \quad j \neq k \,. \end{cases} \tag{2.2}$$

   Si noti che invece può essere $a_0 = a_1$ nel caso in cui $a_1 = 0$ ma come si è detto gli insiemi in cui la funzione è nulla non alterano il valore dell'integrale.

5. abbiamo imposto che la funzione sia non negativa perché alcuni degli insiemi $A_j$ potrebbero avere misura infinita. Se essi hanno tutti misura finita la definizione di integrale ha senso anche senza la condizione sul segno della funzione.

Dciamo che la funzione semplice (2.1) è INTEGRABILE, intendendo che l'integrale possa non essere finito (ciò accade quando almeno uno degli insiemi $A_j$ ha misura infinita ed $a_j > 0$). Se vogliamo intendere che l'integrale è *finito* allora diciamo che la funzione è SOMMABILE.

Consideriamo ora una funzione semplice $s(x)$ di segno qualsiasi e definiamo

$$s^+(x) = \max\{s(x), 0\} \,, \qquad s^-(x) = -\min\{s(x), 0\} \,.$$

Ambedue queste funzioni sono semplici. Se una delle due è sommabile, si definisce

$$\int_\Omega s(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega s^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega s^-(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{2.3}$$

L'integrale in (2.3) è L'INTEGRALE DI LEBESGUE DELLA FUNZIONE SEMPLICE. Si noti una conseguenza immediata della definizione:

$$\int_\Omega |s(x)|\,\mathrm{d}x = \int_\Omega s^+(x)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega s^-(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Anche in questo caso si dice che la funzione semplice $s(x)$, di segno qualsiasi, è SOMMABILE quando il suo integrale esiste finito; ossia quando ambedue le funzioni $s^+(x)$ ed $s^-(x)$ sono sommabili; altrimenti, quando almeno una delle funzioni $s^+(x)$ od $s^-(x)$ è sommabile, diciamo che $s(x)$ è INTEGRABILE.

*Si noti che "integrabile" non esclude che l'integrale sia finito e che molto spesso si usa "integrabile" come sinonimo di "sommabile"*[2].

E' del tutto ovvio che le usuali proprietà dell'integrale, linearità, monotonia ed additività, valgono per l'integrale delle funzioni semplici definito sopra; ed è ancora vero che il prodotto di funzioni semplici sommabili o integrabili è integrabile. Se la funzione semplice non si annulla, anche il suo reciproco è integrabile.

Se la funzione caratteristica di ciascuno degli insiemi $A_j$ è integrabile secondo Riemann (e quindi in particolare il suo integrale è finito) allora la funzione $s(x)$ ammette integrale di Riemann e l'integrale di Riemann e l'integrale di Lebesgue hanno lo stesso valore. In generale però una funzione semplice non ammette integrale di Riemann perché la funzione caratteristica degli $A_j$ può non essere integrabile secondo Riemann. Ciò nonostante, *l'intergrale di Lebesgue di una funzione semplice*[3] *può calcolarsi calcolando un opportuno integrale di Riemann.* Ciò mostriamo ora.

*Supponiamo che la funzione semplice $s(x)$ sia non negativa e che l'insieme $\Omega$ abbia misura finita.* Rappresentiamo $s(x)$ come in (2.2) e introduciamo gli insiemi

$$\Omega_k = A_{k+1}\cup A_{k+2}\cup\cdots\cup A_r \quad \text{così che} \quad \lambda(\Omega_k) = \lambda(A_{k+1})+\lambda(A_{k+2})\cdots\lambda(A_r)\,.$$

[2] la ragione è che il concetto di integrale può estendersi a funzioni che prendono valori in insiemi non ordinati, per esempio a funzioni a valori complessi. In tal caso non ha senso parlare del segno e la somma (2.2) non ha senso se uno degli insiemi ha misura infinita.

[3] e come vedremo, di qualunque funzione.

Osserviamo:

- si ha $\lambda(\Omega_{k+1}) > \lambda(\Omega_k)\lambda(\Omega)$;
- l'insieme $\Omega_k$ è caratterizzato da

$$\Omega_k = \{x \mid s(x) > a_k\} \,;$$

Ora rappresentiamo l'integrale di $s(x)$ come segue. In questa rappresentazione usiamo esplicitamente $a_0 = 0$ e $\lambda(\Omega) < +\infty$ così che $a_0\lambda(\Omega) = 0$.

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega s(x)\,\mathrm{d}x \\
&= a_0\lambda(A_0) + a_1\lambda(A_1) + a_2\lambda(A_2) + \cdots a_{r-2}\lambda(A_{r-2}) + a_{r-1}\lambda(A_{r-1}) + a_r\lambda(A_r) \\
&\qquad = -a_0\lambda(\Omega_0) + a_1[\lambda(\Omega_0) - \lambda(\Omega_1)] + a_2[\lambda(\Omega_1) - \lambda(\Omega_2)] + \cdots \\
&\qquad \cdots + a_{r-2}[\lambda(\Omega_{r-3} - \lambda(\Omega_{r-2})] + a_{r-1}[\lambda(\Omega_{r-2}) - \lambda(\Omega_{r-1})] + a_r\lambda(\Omega_{r-1})\,.
\end{aligned}$$

Raccogliendo i termini che hanno il fattore $\lambda(\Omega_k)$ comune si trova

$$\begin{aligned}
\int_\Omega s(x)\,\mathrm{d}x &= (a_1 - a_0)\lambda(\Omega_0) + (a_2 - a_1)\lambda(\Omega_1) + (a_3 - a_2)\lambda(\Omega_2) \\
&+ \cdots (a_{r-1} - a_{r-2})\lambda(\Omega_{r-2}) + (a_r - a_{r-1})\lambda(\Omega_{r-1})\,. \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

La somma a destra è la somma di Riemann di una funzione costante a tratti, costante su ciascuno degli intervalli[4] $[a_i, a_{i+1})$. Dunque, $\int_\Omega s(x)\,\mathrm{d}x$ è uguale all'integrale di Riemann della funzione $\lambda_s(t)$ con

$$\lambda_s(t) = \lambda(\{x \mid s(x) > t\}) \quad \text{(si noti che } \lambda_s(t) = 0 \text{ se } y > a_r)\,.$$

La funzione $\lambda_s(t)$ si chiama la FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE di $s(x)$. Abbiamo così provato:

**Teorema 48** *Supponiamo che la funzione semplice $s$ prenda valori non negativi. Allora,*[5]

$$\int_0^{+\infty} \lambda_s(\nu)\,d\nu = \int_\Omega s(x)\,dx\,. \qquad (2.5)$$

[4] si noti che il fatto che quest'intervallo sia aperto o chiuso o semichiuso non influisce sul valore dell'integrale. Lo scriviamochiuso a sinistra e aperto a destra convenienza.

[5] l'integrale a destra è l'integrale di Lebesgue di una funzione semplice appena definito mentre l'integrale a sinistra è $\lim_{T\to+\infty} \int_0^T \lambda_s(t)\,\mathrm{d}t$, limite di integrali di Riemann di una funzione decrescente.

Si noti che nel teorema non abbiamo riportato l'ipotesi che $\Omega$ abbia misura finita. Infatti, l'uguaglianza (2.5) vale anche se $\int_\Omega s(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$ pur di interpretarla in questo modo:

- se $\int_\Omega s(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$ allora $s(x)$ è costante e strettamente positiva su (almeno) uno degli $A_i$ per cui $\lambda(A_i) = +\infty$;
- in questo caso $\lambda(\Omega_k) = +\infty$ per ogni $k < i$ così che

$$\lambda_s(t) = +\infty \qquad \text{per } t \in [0, a_i) \text{ ed è } a_i > 0\,.$$

- si definisce quindi $\int_0^{+\infty} \lambda_s(\nu)\,\mathrm{d}\nu = +\infty$.

### 2.1.2 L'integrale delle funzioni misurabili positive

Sia $f(x)$ una funzione misurabile, *non negativa.* Sia $(s_n)$ una qualsiasi successione di funzioni semplici *crescente* ad $f$. Definiamo

$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_n \int_\Omega s_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Naturalmente, perché la definizione abbia senso dobbiamo provare che essa è indipendente dalla particolare successione di funzioni semplici scelta. Premettiamo un lemma che verrà utile anche in seguito:

**Lemma 49** *Sia $(s_n)$ una successione* crescente *di funzioni semplici* non negative *e sia $\tilde{s}(x)$ una funzione semplice. Se*

$$\lim s_n(x) \geq \tilde{s}(x) \qquad \forall x \in \Omega$$

*allora*

$$\lim_n \int_\Omega s_n(x)\,dx \geq \int_\Omega \tilde{s}(x)\,dx\,.$$

**Dim.** Se $\lambda(\Omega) = +\infty$, scegliamo una successione $(B_r)$ di insiemi *tutti di misura finita*, crescente e tale che

$$\bigcup_{r=1}^{+\infty} B_r = \Omega\,.$$

Proviamo:

$$\lim_n \int_{B_r} s_n(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_{B_r} \tilde{s}(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.6}$$

per ogni $r$. Ciò fatto, la diseguaglianza su $\Omega$ seguirà da

$$\lim_n \int_\Omega s_n(x)\,\mathrm{d}x \geq \lim_n \int_{B_r} s_n(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_{B_r} \tilde{s}(x)\,\mathrm{d}x$$

per ogni $r$.

Ricapitolando, basta lavorare su un *fissato* insieme $B$ *di misura finita.* Proviamo che su tale insieme vale

$$\lim_n \int_B s_n(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_B \tilde{s}(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Fissiamo $\epsilon > 0$ e consideriamo gli insiemi

$$A_n = \{x \in B \mid s_n(x) \geq \tilde{s}(x) - \epsilon\}\,.$$

Chiaramente, la successione di insiemi $(A_n)$ cresce e inoltre, da $\lim s_n(x) \geq \tilde{s}(x)$, si ha

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = B\,.$$

Posto $Y_n = B - A_n$, la successione di insiemi $(Y_n)$ decresce e $\cap_n Y_n = \emptyset$. Inoltre, $B$ ha misura finita. Dunque, dal Teorema 13, $\lim[\lambda(B - A_n)] = 0$. Inoltre,

$$s_n(x) \geq (\tilde{s}(x) - \epsilon)\chi_{A_n}(x)\,.$$

Dunque,

$$\int_B s_n(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_B (\tilde{s}(x) - \epsilon)\chi_{A_n}(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_B \tilde{s}(x)\chi_{A_n}(x)\,\mathrm{d}x - \epsilon\lambda(A_n)$$
$$\geq \int_B \tilde{s}(x)\,\mathrm{d}x - \int_{B-A_n} \tilde{s}(x)\,\mathrm{d}x - \lambda(B)\epsilon\,.$$

Si ricordi che $\tilde{s}(x)$ è una funzione semplice, e quindi è limitata,

$$0 \leq \tilde{s}(x) < C$$

e che $B$ è limitato. Dunque,

$$\lim_n \left| \int_{B-A_n} \tilde{s}(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \lim_n [C\lambda(B - A_n)] = 0\,.$$

Quindi, per $n$ abbastanza grande valgono ambedue le disuguaglianze seguenti:

$$\int_{B-A_n} \tilde{s}(x)\,\mathsf{d}x < \epsilon\,, \qquad \int_B s_n(x)\,\mathsf{d}x \geq \int_B \tilde{s}(x)\,\mathsf{d}x - [\lambda(B)+1]\epsilon\,.$$

La disuguaglianza richiesta segue dall'arbitrarietà di $\epsilon$. ∎

Possiamo ora provare:

**Lemma 50** *Due successioni* $(s_n)$ *ed* $(\tilde{s}_n)$ *di funzioni semplici e non negative, ambedue crescenti e convergenti alla medesima funzione* $f$ *non negativa, verificano*

$$\lim_n \int_\Omega s_n(x)\,dx = \lim_n \int_\Omega \tilde{s}_n(x)\,dx\,.$$

**Dim.** Basta provare

$$\lim_n \int_\Omega s_n(x)\,\mathsf{d}x \geq \lim_k \int_\Omega \tilde{s}_k(x)\,\mathsf{d}x\,.$$

L'uguaglianza segue invertendo il ruolo di $(s_n)$ e di $(\tilde{s}_n)$.

Si noti che

$$\lim_n s_n(x) = f(x) \geq \tilde{s}_k(x)$$

per ogni $k$. Dunque, dal Lemma 49, si ha che

$$\lim_n \int_\Omega s_n(x)\,\mathsf{d}x \geq \int_\Omega \tilde{s}_k(x)\,\mathsf{d}x\,.$$

per ogni $k$. Passando al limite rispetto a $k$ si trova la disuguaglianza voluta. ∎

**Definitione 51** Per il modo come abbiamo definito l'integrale delle funzioni misurabili positive,

$$\int_\Omega f(x)\,\mathsf{d}x \geq 0$$

e, può essere, $+\infty$. Diremo che $f(x)$ è SOMMABILE se l'integrale è finito. Diremo che la funzione è INTEGRABILE sia quando l'integrale è finito che quando è $+\infty$. ∎

*Dato che le usuali proprietà di monotonia, linearità e additività rispetto al dominio valgono per gli integrali delle funzioni semplici, queste si trasferiscono agli integrali delle funzioni positive.*

La definizione di integrale ed il Lemma 50 mostrano:

**Lemma 52** *Vale:*

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \sup\left\{ \int_\Omega \chi(x)\,dx\,,\ \chi(x) \text{ semplice, } \chi(x) \le f(x) \right\}. \qquad (2.7)$$

**Osservazione 53 (Sulla terminologia)** In questo corso cercheremo di usare il termine "sommabile" quando è essenziale che l'integrale sia finito. Però bisogna avvertire che nella pratica il termine più usato è "integrabile", spesso lasciando al lettore di capire se si vuole anche che l'integrale sia finito. ∎

La costruzione dell'integrale approssima $f(x)$ con successioni di funzioni semplici e le successioni debbono essere *decrescenti.* Vorremmo svincolarci da questa condizione sulla monotonia delle successioni approssimanti. Ciò è *solo in parte* possibile come conseguenza dei teoremi relativi allo scambio di limiti e integrali. Si vedano le osservazioni 55 e 75. Ora limitiamoci a provare proviamo un risultato parziale che dà anche un'idea delle difficoltà che si incontrano se vogliamo lavorare con successioni decrescenti:

**Teorema 54** *Sia* $f(x) \ge 0$ *una funzione misurabile e* limitata *definita su un insieme* $\Omega$ di misura finita.

*Sia* $(S_n(x))$ *una successione* limitata *di funzioni semplici e la successione sia decrescente,*

$$S_{n+1}(x) \le S_n(x) \le S_1(x) < M\,.$$

*Si ha:*

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = f(x)\ \forall x\in\Omega \implies \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega S_n(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,dx\,.$$

**Dim.** Si fissi una qualsiasi successione crescente $(s_n(x))$ di funzioni semplici non negative e tale che

$$\lim_{n\to+\infty} s_n(x) = f(x)\,.$$

Dalla definizione di integrale,

$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega s_n(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

si vede che va provato

$$\inf\left\{\int_\Omega S_n(x)\,\mathrm{d}x\,,\quad n>0\right\}=\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega S_n(x)\,\mathrm{d}x$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega s_n(x)\,\mathrm{d}x=\sup\left\{\int_\Omega s_n(x)\,\mathrm{d}x\,,\quad n>0\right\}\,.$$

Dunque va provato quanto segue:

$$\forall\epsilon>0\ \exists N_\epsilon\mid n>N_\epsilon\quad\Longrightarrow\quad\int_\Omega S_n(x)\,\mathrm{d}x-\int_\Omega s_n(x)\,\mathrm{d}x<\epsilon \tag{2.8}$$

(si osservi che la differenza degli integrali è non negativa). La dimostrazione è analoga a quella del Lemma 49.

Prima di tutto notiamo che grazie alla limitatezza della successione $(S_n(x))$ e al fatto che $s_n(x)\geq 0$ si ha

$$0\leq S_n(x)-s_n(x)\leq S_n(x)\leq M\,. \tag{2.9}$$

Si fissi $\sigma>0$ e per questo fissato valore di $\sigma$ si definisca

$$B_{n,\sigma}=\{x\mid S_n(x)-s_n(x)>\sigma\}\,.$$

La successione $(S_n(x)-s_n(x))$ decresce e quindi anche la successione di insiemi $n\mapsto B_{n,\sigma}$ decresce. Inoltre,

$$\lim_{n\to+\infty}[S_n(x)-s_n(x)]=0\qquad\forall x\in\Omega\ \text{e quindi}\ \bigcap_{n>0}B_{n,\sigma}=\emptyset\,.$$

Ora interviene l'ipotesi che $\Omega$ ha misura finita così che

$$\lambda(B_{n,\sigma})\leq\lambda(B_{1,\sigma})\leq\lambda(\Omega)<+\infty\,.$$

Dal Teorema 14,

$$\lim_{n\to+\infty}\lambda(B_{n,\sigma})=0\,.$$

Esiste quindi un $N_\sigma$ tale che

$$n>N_\sigma\quad\Longrightarrow\quad\lambda(B_{n,\sigma})<\sigma\,. \tag{2.10}$$

Usando le proprietà (2.9) e (2.10) stimiamo la differenza degli integrali in (2.8) per $n > N_\sigma$:

$$0 \le \int_\Omega [S_n(x) - s_n(x)]\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega\setminus B_{n,\sigma}} [S_n(x) - s_n(x)]\,\mathrm{d}x + \int_{B_{n,\sigma}} [S_n(x) - s_n(x)]\,\mathrm{d}x$$
$$\le \lambda(\Omega) \sup_{x\in\Omega\setminus B_{n,\sigma}} [S_n(x) - s_n(x)] + M\lambda(B_{n,\sigma}) \le (\lambda(\Omega) + M)\sigma\,.$$

La proprietà (2.8) segue scegliendo $\sigma = \epsilon/(M + \lambda(\Omega))$. ∎

**Osservazione 55** Si noti che il teorema precedente non vale su insiemi di misura infinita. Per esempio la funzione $f(x) \equiv 0$ ha integrale nullo su $\mathbb{R}$ mentre le funzioni $S_n(x)$ con $S_n(x) \equiv 1/n$ hanno integrale uguale a $+\infty$ per ogni $n$. Dunque, gli integrali delle $S_n(x)$ non convergono a quello di $f(x)$. ∎

### 2.1.3 Funzioni integrabili

Sia ora $f$ una generica funzione misurabile. Associamole le due funzioni

$$f_+(x) = \max\{0, f(x)\}\,, \qquad f_-(x) = \max\{0, -f(x)\}$$

così che

$$f_+(x) \ge 0\,, \qquad f_-(x) \ge 0$$

e inoltre

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x)\,, \qquad |f(x)| = f_+(x) + f_-(x)\,.$$

**Definitione 56** Diciamo che la funzione $f$ è SOMMABILE se ambedue le funzioni $f_+$ ed $f_-$ sono funzioni (positive) sommabili, e quindi con *integrale finito*, e in tal caso poniamo

$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f_+(x)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f_-(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Se accade che *una sola* delle due funzioni $f_+$ oppure $f_-$ ha integrale $+\infty$, allora diremo che $f(x)$ ha integrale $+\infty$ oppure $-\infty$. Il termine SOMMABILE indica funzioni il cui integrale è finito mentre $f$ è INTEGRABILE quando il suo integrale esiste, finito o meno.

L'integrale che abbiamo così definito si chiama INTEGRALE DI LEBESGUE. ∎

Si osservi che ogni funzione misurabile di segno costante è integrabile.

**Osservazione 57 (Sulla terminologia)** Avvertiamo nuovamente che nella pratica il termine più usato è "integrabile", spesso lasciando al lettore di capire se si vuole che l'integrale sia finito. ∎

E' immediato dalla definizione di integrale:

**Teorema 58** *Una funzione misurabile $f(x)$ è sommabile se e solo se $|f(x)|$ è sommabile.*

Si noti che questa è una proprietà specifica dell'integrale di Lebesgue. Infatti, per esempio,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 x \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |\sin^2 x| \, dx = +\infty\,.$$

E' ancora vero che valgono le usuali proprietà dell'integrale:

**Teorema 59** *Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni sommabili. Vale*

- $\int_\Omega [\alpha f(x) + \beta g(x)] \, dx = \alpha \int_\Omega f(x) \, dx + \beta \int_\Omega g(x) \, dx$;
- *se* $f(x) \le g(x)$ *allora* $\int_\Omega f(x) \, dx \le \int_\Omega g(x) \, dx$;
- *vale* $\left|\int_\Omega f(x) \, dx\right| \le \int_\Omega |f(x)| \, dx$;
- *se* $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ *con* $\Omega_1$ *e* $\Omega_2$ *misurabili e disgiunti allora*

$$\int_\Omega f(x) \, dx = \int_{\Omega_1} f(x) \, dx + \int_{\Omega_2} f(x) \, dx\,.$$

## 2.2 Integrale ed insiemi nulli

Chiaramente, una funzione semplice nulla q.o. ha integrale zero. Più in generale, sia $|f(x)| = 0$ q.o. Ogni funzione semplice non negativa maggiorata da $f$ ha integrale nullo; e quindi, se $(s_n)$ è una successione crescente di funzioni semplici che converge a tale funzione $f$ si ha

$$\int_\Omega |f(x)| \, dx = \lim \int_\Omega |s_n(x)| \, dx = 0\,.$$

Più ancora:

**Teorema 60** *Una funzione $f(x) \geq 0$ q.o. ha integrale nullo se e solo se è nulla q.o.*

**Dim.** Si è già detto che se $f$ è q.o. nulla su $\Omega$ allora il suo integrale è nullo. Mostriamo il viceversa. Sia dunque

$$f(x) \geq 0 \text{ q.o. } x \in \Omega\,, \qquad \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Introduciamo gli insiemi

$$A = \{x \mid f(x) \neq 0\} \qquad A_n = \{x \mid f(x) \geq 1/n\}\,.$$

La successione di insiemi $(A_n)$ è crescente e $A = \cup_n A_n$. Dunque, dal Teorema 14, si ha che

$$\lambda(A) = \lim \lambda(A_n).$$

Ma,

$$0 \leq \frac{1}{n}\lambda(A_n) \leq \int_{A_n} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Dunque, $\lambda(A_n) = 0$ per ogni $n$, così che anche $\lambda(A) = 0$. ∎

Inoltre:

**Teorema 61** *Sia*

$$A_n = \{x \mid |f(x)| > n\}\,.$$

*Se $f(x)$ è integrabile allora*

$$\lim_n \lambda(A_n) = 0\,.$$

**Dim.** Basta studiare il caso in cui $f(x) \geq 0$. In tal caso vale

$$0 \leq n\lambda(A_n) \leq \int_{A_n} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$$

e quindi

$$0 \leq \lim_n \lambda(A_n) \leq \lim_n \frac{1}{n}\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,. \;∎$$

**Osservazione 62** Usa chiamare $\cap A_n$ l'insieme su cui "$f$ è infinita"; e quindi dire che "una funzione integrabile è finita q.o.". Questo vuol dire semplicemente che ad $f(x)$ non si attribuisce "valore" $+\infty$ salvo che su un insieme nullo; e ciò non influisce sul valore dell'integrale.

## 2.3 Integrali di Lebesgue, di Riemann e improprio

Ricordiamo che l'integrale di Riemann si definisce per funzioni limitate definite su insiemi limitati.

Sia l'integrale di Riemann che quello di Lebesgue si ottengono "approssimando" la funzione da integrare con funzioni semplici; ma, nel caso dell'integrale di Riemann, le funzioni semplici si ottengono "affettando" il *dominio della funzione,* e quindi sono funzioni costanti a tratti. Nel caso dell'integrale di Lebesgue le funzioni semplici che approssimano una funzione misurabile $f(x)$ si ottengono "affettando" il *codominio della funzione,* si veda la costruzione nel Teorema 43: sono ancora funzioni che prendono un numero finito di valori ma gli insiemi su cui esse sono costanti sono generici insiemi misurabili secondo Lebesgue. Ciò nonostante esistono relazioni tra i due integrali. Infatti, il teorema di Riemann-Lebesgue, Teorema 4, mostra che una funzione integrabile di Riemann è continua q.o., e quindi misurabile. Essendo anche limitata e definita su un insieme limitato, essa è anche integrabile secondo Lebesgue, e non è difficile vedere che i due integrali hanno lo stesso valore[6]:

**Teorema 63** *Una funzione (limitata definita su un insieme limitato) che è integrabile secondo Riemann è anche integrabile secondo Lebesgue ed i due integrali hanno il medesimo valore.*

La definizione di *integrale improprio* è invece sostanzialmente diversa dalla costruzione di Lebesgue, ed esistono funzioni che ammettono *integrale improprio* senza avere *integrale di Lebesgue.* Tra queste anche funzioni importanti per le applicazioni, come per esempio le funzioni

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}\,, \qquad f(x) = \sin x^2\,.$$

Si sa che queste funzioni ammettono integrale improprio, senza essere assolutamente integrabili; e quindi non possono avere integrale di Lebesgue, per il Teorema 58. Tuttavia, se l'integrale di Lebesgue di una funzione $f$ esiste, questo ha sempre una relazione con un opportuno integrale di Riemann. Vale

[6]Il Teorema 4 è stato enunciato per funzioni di una variabile ma si può provare in ogni dimensione che una funzione integrabile secondo Riemann è integrabile secondo Lebesgue e che i due integrali hanno lo stesso valore.

infatti il teorema seguente, che generalizza il teorema 48. Introduciamo la FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE della funzione misurabile non negativa $f$,

$$\lambda_f(t) = \lambda(\{x \in \Omega \mid f(x) > t\})\,. \tag{2.11}$$

Chiaramente la funzione $\lambda_f$ è definita su $[0, +\infty)$ e *decrescente;* e quindi integrabile nel senso dell'integrale improprio di Riemann. Vale:

**Teorema 64** *Sia $f(x)$ una funzione misurabile su $\Omega$,* q.o. non negativa e limitata. *Supponiamo che $\Omega$ abbia* misura finita. *Allora*

$$\int_\Omega f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \lambda_f(t)\, dt\,. \tag{2.12}$$

**Dim.** Per ipotesi, esiste $M > 0$ tale che $0 \le f(x) \le M$. Dunque $\lambda_f(t) = 0$ per $t > M$ e quindi

$$\int_0^{+\infty} \lambda_f(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^M \lambda_f(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

L'integrale $\int_0^M \lambda_f(t)\, \mathrm{d}t$ *esiste nel senso di Riemann perché la funzione integranda è monotona decrescente.*

Facciamo intervenire la definizione dell'integrale di Riemann di $\lambda_f(t)$, che si ottiene in questo modo: per ogni numero naturale $n$ si divide $[0, M]$, dominio di $\lambda_f(t)$, in segmenti $[t_i, t_{i+1}]$, ove

$$t_i = i\frac{M}{n}\,, \qquad i = 0\,, \cdots\,, n-1.$$

Essendo $\lambda_f$ *decrescente,* vale

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_f(t_i)[t_{i+1} - t_i] \ge \int_0^M \lambda_f(t)\, \mathrm{d}t \ge \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_f(t_{i+1})[t_{i+1} - t_i]\,. \tag{2.13}$$

Sapendo già che $\lambda_f(t)$ è integrabile, perché è decrescente, si ha:

$$\int_0^M \lambda_f(t)\, \mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_f(t_i)[t_{i+1} - t_i]\right] = \lim_{n\to+\infty} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_f(t_{i+1})[t_{i+1} - t_i]\right] \tag{2.14}$$

Consideriamo la somma a sinistra in (2.13). Notando che $t_0 = 0$ si ha

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_f(t_i)[t_{i+1} - t_i] = \lambda_f(t_0)(t_1 - t_0) + \lambda_f(t_1)(t_2 - t_1)$$
$$+ \lambda_f(t_2)(t_3 - t_2) + \cdots + \lambda_f(t_{n-1})(t_n - t_{n-1})$$
$$= t_1[\lambda_f(t_0) - \lambda_f(t_1)] + t_2[\lambda_f(t_1) - \lambda_f(t_2)]$$
$$+ \cdots + t_n[\lambda_f(t_{n-2}) - \lambda_f(t_{n-1})] + t_n[\lambda_f(t_{n-1}) - \lambda_f(t_{n_\epsilon})] .$$

Si ricordi infatti che $\lambda_f(t_n) = \lambda_f(M) = 0$.

Va osservato che in questo calcolo si è esplicitamente usata la condizione $\lambda(\Omega) < +\infty$ che implica che ogni differenza $[\lambda_f(t_{i-1}) - \lambda_f(t_{i_\epsilon})]$ è una differenza tra numeri, ossia non compare il simbolo $+\infty - \infty$.

Notando

$$\lambda_f(t_i) - \lambda_f(t_{i+1}) = \lambda(A_i) , \qquad A_i = \{x \mid t_i < f(x) \le t_{i+1}\} .$$

si vede che la somma di sinistra in (2.13) è l'integrale su $\Omega$ di una funzione semplice

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_f(t_i)[t_{i+1}-t_i] = \sum_{i=0}^{n-1} t_i\lambda(A_i) = \int_\Omega s_n(x)\,\mathsf{d}x \quad \text{e su } A_i \text{ si ha } t_i \le f(x) < t_{i+1} .$$

Dunque $s_n(x)$ è funzione semplice minorante $f(x)$. In modo analogo si vede che la somma di destra è l'integrale di una funzione semplice $S_n(x)$ maggiorante $f(x)$:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_f(t_i)[t_{i+1} - t_i] = \int_\Omega s_n(x)\,\mathsf{d}x$$
$$\le \int_\Omega f(x)\,\mathsf{d}x$$
$$\le \int_\Omega S_n(x)\,\mathsf{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_f(t_{i+1})[t_{i+1} - t_i] .$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ i due limiti, a sinistra ed a destra, coincidono e, come si vede da (2.14), il valore comune è $\int_0^M \lambda_f(t)\,\mathsf{d}t$. Si trova quindi l'uguaglianza che volevamo:

$$\int_0^M \lambda_f(t)\,\mathsf{d}t = \int_\Omega f(x)\,\mathsf{d}x . \quad \blacksquare$$

**Osservazione 65** Notiamo una discrepanza tra i due teoremi 48 e 64: nel primo teorema non abbiamo avuto bisogno dell'ipotesi $\lambda(\Omega) < +\infty$ che invece è stata esplicitamente usata nella dimostrazione precedente. Vedremo più avanti, nel Teorema 70, che il Teorema 64 vale anche se $\lambda(\Omega) = +\infty$ e anche se $f(x)$ non è limitata. ∎

## 2.4 Limiti ed integrali di Lebesgue

Una ragione importante per introdurre un integrale più generale di quello di Riemann è di trovare teoremi migliori per lo scambio del segno di limite e di integrale[7]. Questi teoremi mostriamo ora.

**Teorema 66 (**di Beppo Levi o della Convergenza Monotona**)** *Sia* $(f_n)$ *una successione* crescente *di funzioni misurabili, che verifica*

$$f_n(x) \geq 0\,, \qquad \lim f_n(x) = f(x) \quad \textit{q.o. } x \in \Omega\,.$$

*Allora,*

$$\lim \int_\Omega f_n(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\, dx\,.$$

*Non si esclude che l'integrale di* $f(x)$ *possa essere* $+\infty$*.*

**Dim.** Escludendo da $\Omega$ l'insieme (di misura nulla) dei punti nei quali la successione $(f_n)$ non converge ad $f$, si vede che basta studiare il caso in cui $(f_n)$ converge ad $f$ su $\Omega$.

La funzione non negativa $f$, essendo limite di funzioni misurabili, è misurabile e quindi il suo integrale esiste, può essere uguale a $+\infty$.

Notiamo che la condizione $f_n(x) \leq f(x)$ implica

$$\int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{così che} \quad \lim \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$$

[7]si ricordi che il segno di limite e quello di integrale di Riemann si possono scambiare se c'è convergenza uniforme, proprietà troppo forte per molte applicazioni, per esempio alla serie di Fourier. Questo risultato si può un po' migliorare. Infatti, se $f_n(x) \to f(x)$ puntualmente su $[a, b]$ e se si può provare che $f(x)$ è continua allora $\lim \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Ma in genere provare la continuità di una funzione limite puntuale ma non uniforme è tutt'altro che facile.

e quindi la proprietà da provare è:

$$\lim_n \int_\Omega f_n(x)\, \mathsf{d}x \geq \int_\Omega f(x)\, \mathsf{d}x\,.$$

Ricordiamo la (2.7), ossia

$$\int_\Omega f(x)\, \mathsf{d}x = \sup\left\{ \int_\Omega \chi(x)\, \mathsf{d}x\,,\ \chi(x) \text{ semplice, } \chi(x) \leq f(x) \right\}\,.$$

Dunque basta provare che se $\chi(x) \geq 0$ è una qualsiasi funzione semplice tale che $\chi(x) \leq f(x)$ allora vale

$$\lim \int_\Omega f_n(x)\, \mathsf{d}x \geq \int_\Omega \chi(x)\, \mathsf{d}x\,.$$

Fissiamo quindi una qualsiasi funzione semplice $\chi(x)$ tale che $0 \leq \chi(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in \Omega$.

Le funzioni $f_n(x)$ possono essere illimitate. Introduciamo le funzioni limitate $g_n(x)$ definite da

$$g_n(x) = \min\{f_n(x)\,,\ \chi(x)\}\,.$$

Si noti che

$$0 \leq g_n(x) \leq f_n(x)\,, \qquad \lim g_n(x) = \min\{\lim f_n(x)\,,\ \chi(x)\} = \chi(x) \tag{2.15}$$

perché $\lim f_n(x) = f(x) \geq \chi(x)$. Inoltre, le funzioni $g_n(x)$ *sono limitate* perché maggiorate dalla funzione limitata $\chi(x)$.

Il teorema è provato se si può mostrare che

$$\lim \int_\Omega g_n(x)\, \mathsf{d}x \geq \int_\Omega \chi(x)\, \mathsf{d}x\,. \tag{2.16}$$

Proviamo che la proprietà (2.16) vale costruendo una nuova successone *crescente* $(\hat{\chi}_n(x))$ di *funzioni semplici* tali che

$$\hat{\chi}_n(x) \leq g_n(x)\,, \qquad \lim \int_\Omega \hat{\chi}_n(x)\, \mathsf{d}x \geq \int_\Omega \chi(x)\, \mathsf{d}x\,.$$

La successione $(\hat{\chi}_n(x))$ si costruisce in due passi:

**Passo 1)**

Si ricordi che le funzioni misurabili *e limitate* si possono approssimare uniformemente da sotto con funzioni semplici. Quindi, ricordando la dimostrazione del Teorema 43, per ogni $n$ e per ogni $k$ si può trovare una funzione semplice $\chi_{n,k}(x)$ e tale che

$$\begin{aligned} & g_n(x) - \frac{1}{k} \leq \chi_{n,k}(x) \leq g_n(x)\,, \\ & \lim_k \int_\Omega \chi_{n,k}(x)\,\mathsf{d}x = \int_\Omega g_n(x)\,\mathsf{d}x\,. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Esiste quindi $k_n$ tale che[8]

$$\begin{aligned} & g_n(x) - \frac{1}{n} \leq \chi_{n,k_n}(x) \leq g_n(x)\,, \\ & \int_\Omega g_n(x)\,\mathsf{d}x - \frac{1}{n} \leq \int_\Omega \chi_{n,k_n}(x)\,\mathsf{d}x \leq \int_\Omega g_n(x)\,\mathsf{d}x\,. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} & \lim \chi_{n,k_n}(x) = \lim g_n(x) = \chi(x)\,, \\ & \lim \int_\Omega \chi_{n,k_n}(x)\,\mathsf{d}x = \lim \int_\Omega g_n(x)\,\mathsf{d}x\,. \end{aligned} \tag{2.19}$$

**Passo 2)**

La successione $(\chi_n(x))$ appena costruita non sarà in generale crescente. Modifichiamola come segue. Notiamo che se $r < n$ si ha

$$\chi_{k,k_r}(x) \leq g_k(x) \leq g_n(x)$$

e quindi anche la funzione

$$\hat{\chi}_n(x) = \max\{\chi_{1,k_1}(x)\,,\ \chi_{2,k_2}(x)\,,\ldots\ \chi_{n,k_n}(x)\}$$

verifica le proprietà in (2.18) ed inoltre per ogni $x$ si ha

$$\chi_{n,k_n}(x) \leq \hat{\chi}_n(x) \leq \hat{\chi}_{n+1}(x) \leq g_{n+1}(x)\,, \qquad \lim \hat{\chi}_n(x) = \chi(x)$$

[8] si noti che la disuguaglianza tra gli integrali non si ottiene integrando la disuguaglianza tra le funzioni perché potrebbe essere $\lambda(\Omega) = +\infty$. Essa discende da non discende dalla disuguaglianza tra le funzioni, perché $\Omega$ può avere misura infinita. Essa discende da (2.17) e quindi è conseguenza della definizione dell'integrale della funzione $g_n(x)$.

(il limite discende da (2.15) e da (2.19)). Basta quindi provare che

$$\lim \int_\Omega \hat{\chi}_n(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_\Omega \chi(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Questa proprietà discende dal Lemma 49 perchè la successione di funzioni non negative $(\hat{\chi}_n(x))$ è *crescente* e *converge puntualmente* a $\chi(x)$. ∎

**Osservazione 67** Il teorema della convergenza monotona può applicarsi anche se le funzioni non hanno segno costante, purché valga

$$g(x) \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)\,, \qquad \lim f_n(x) = f(x)$$

con $g(x)$ *funzione sommabile.* Infatti, basta applicare il teorema alla successione $(f_n - g)$ ed alla funzione $f - g$. Si può applicare anche se le funzioni $f_n$ sono *negative* (o almeno maggiorate da una funzione $g$ *sommabile*) e convergono, *decrescendo,* ad $f$. Basta infatti applicare il teorema alla successione $(-f_n)$ ed alla funzione $-f$. Però, senza condizioni di questo tipo l'asserto del teorema *non vale,* come mostrano gli esempi seguenti:

**Es. 1.** Sia

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora, $\lim f_n(x) = f(x) = 0$ q.o., ma gli integrali delle $f_n$ valgono tutti $1$.

Si noti che la successione $(f_n)$ non è monotona.

**Es. 2.** Sia

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora, $\lim f_n(x) = f(x) = 0$ per ogni $x$, ma gli integrali delle $f_n$ valgono tutti $1$.

Ancora, la successione $(f_n)$ non è monotona.

**Es. 3.** Quest'esempio si è già visto nell'osservazione 55. Sia

$$f_n(x) = \frac{1}{n}$$

per ogni $x$. La successione $(f_n)$ è ora una successione di funzioni *positive* con limite $f(x) = 0$; ma la successione è *decrescente.* Ciascuna delle $f_n$ ha integrale $+\infty$ mentre $f$ ha integrale nullo. ∎

Mostriamo ora alcune conseguenze immediate del Teorema della Convergemza Monotona.

**Corollario 68** *Sia $f(x) \geq 0$ e sia $(\Omega_n)$ una successione di insiemi misurabili, tali che*

$$\Omega_n \subseteq \Omega_{n+1}\,, \qquad \bigcup_r \Omega_n = \Omega\,.$$

*Vale:*

$$\lim_n \int_{\Omega_n} f(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,dx\,.$$

**Dim.** Sia $\chi_n(x)$ la funzione caratteristica di $\Omega_n$. La successione di funzioni non negative $(\chi_n f)$ è crescente e converge ad $f$. Inoltre,

$$\int_{\Omega_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \chi_n(x) f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Il corollario segue applicando il teorema della convergenza monotona alla successione crescente di funzioni $(\chi_n(x)f(x))$. ∎

All'inizio del paragrafo 2.3 abbiamo visto che i due concetti di integrale di Lebesgue e di integrale improprio sono indipendenti. Non è così se le funzioni hanno segno costante:

**Corollario 69** *Siano $f(x)$ definita su $(a,b]$ e $g(x)$ definita su $[T,+\infty)$ ambedue positive e localmente integrabili secondo Riemann (ossia integrabili su sottointervalli compatti del loro dominio). Gli integrali impropri $\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_T^{+\infty} g(x)\,dx$ coincidono con i rispettivi integrali di Lebesgue. Dunque, più in generale, ogni integrale improprio di funzione di segno costante e localmente integrabile secondo Riemann coincide con l'integrale di Lebesgue della funzione.*

**Dim.** Il Teorema di Riemann-Lebesgue (Teorema 4) mostra che le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono misurabili e quindi, essendo positive, integrabili secondo Lebesgue.

Per definizione degli integrali impropri,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_{a+1/n}^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$
$$\int_T^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_T^n g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

La successione di funzioni non negative[9] $(f(x)\chi_{[a+1/n,b]}(x))$ è crescente e converge ad $f$ su $(a,b]$ e quindi per il Teorema 66 si ha

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\int_{a+1/n}^b f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{definizione di integrale improprio}} = \lim_{n\to+\infty}\underbrace{\int_a^b f(x)\chi_{[a+1/n,b]}(x)\,\mathrm{d}x}_{\substack{\text{integrale di Riemann}\\ =\text{integrale di Lebesgue}}}$$

$$\underbrace{=}_{\substack{\text{Teor.}\\66}} \underbrace{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{integrale di Lebesgue}}\,.$$

Infatti, l'ultimo integrale è un integrale di Lebesgue perché ottenuto applicando il Teorema 66.

In modo analogo si tratta l'integrale improprio su $[T,+\infty)$. Si introduce la successione crescente di funzioni non negative $(f(x)\chi_{[T,n]}(x))$. Questa successione di funzioni converge puntualmente ad $f(x)$ e quindi

$$\underbrace{\int_T^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\int_T^n f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{definizione di integrale improprio}} = \lim_{n\to+\infty}\underbrace{\int_T^{+\infty} f(x)\chi_{[T,n]}(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{integrale di Lebesgue}}$$

$$\underbrace{=}_{\substack{\text{Teor.}\\66}} \underbrace{\int_T^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{integrale di Lebesgue}}\,.$$

L'asserto in generale segue dal fatto che un integrale improprio per esempio su $(-\infty,+\infty)$ e/o quando la funzione ha limite infinito in un numero finito di punti, è definito iterando un numero finito di volte le procedure appena descritte. ∎

Notiamo ora che, come conseguenza del Teorema della Convergenza Monotona, le ipotesi di limitatezza si possono rimuovere dal Teorema 64.

**Teorema 70** *Sia $f(x)$ una funzione misurabile sull'insieme misurabile $\Omega$,* q.o. non negativa *(la funzione $f(x)$ può essere illimitata e l'insieme $\Omega$ può avere misura infinita) e sia $\lambda_f(t)$ la sua funzione di distribuzione definita in (2.11). Allora*

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \lambda_f(t)\,dt\,. \tag{2.20}$$

[9] ricordiamo che $\chi_A$ indica la funzione caratteristica di un insieme $A$.

**Dim.** I valori degli integrali in (2.20) non cambiano se ad $\Omega$ si sostituisce l'insieme $\Omega \cap \{x \mid f(x) \geq 0\}$. Dunque possiamo supporre che $f(x)$ sia ovunque positiva.

Prima supponiamo $\lambda(\Omega) < +\infty$. Se $f(x)$ è illimitata definiamo

$$f^N(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad 0 \leq f(x) < N \\ N & \text{se} \quad 0 \leq f(x) \geq N \end{cases}$$

Il Teorema 64 mostra che

$$\int_\Omega f^N(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lambda_{f^N}(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{2.21}$$

La successione $(f^N(x))$ è una successione crescente di funzioni positive e quindi, per il Teorema della Convergenza Monotona.

$$\lim_N \int_\Omega f^N(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Anche la successione $(\lambda_{f^N}(t))$ è un successione crescente di funzioni non negative ed inoltre vale

$$\lim_N \lambda_{f_N}(t) = \lambda_f(t)$$

per ogni $t$ fissato. Per vederlo, consideriamo, con $t$ fissato, gli insiemi

$$A_{N,t} = \{x \mid f^N(x) > t\}\,, \qquad A_t = \{x \mid f(x) > t\}\,.$$

La successione di insiemi $N \mapsto A_{N,t}$ è crescente ed inoltre

$$A_{N,t} \subseteq A_t \quad \text{perché } f^N(x) \leq f(x)\,.$$

Se esite $x_0 \in A_t$, $x_0 \notin \cup_{N>0} A_{N,t}$ allora si ha

$$f_N(x_0) \leq t < f(x_0) \quad \text{e quindi } \lim_N f_N(x_0) < f(x_0)$$

mentre invece $\lim_{N\to+\infty} f^N(x_0) = f(x_0)$.

Dunque $A_t = \cup_{N>0} A_{N,t}$ e dal Teorema 14 si ha

$$\lim_N \lambda_{f_N}(t) = \lambda_f(t)\,.$$

L'uguaglianza richiesta segue dal Corollario 69.

Ora supponiamo che $\lambda(\Omega) = +\infty$. Introduciamo

$$\Omega_N = \Omega \cap \{x \mid \|x\| < N\}\,, \quad f_N(x) = f(x)\chi_{\Omega_N}(x)$$

($\chi_{\Omega_N}(x)$ è la funzione caratteristica di $\Omega_N$). E' chiaro che $(f_N(x))$ è una successione di funzioni non negative crescente ad $f(x)$ e che $(\lambda_{f_N}(t))$ è anch'essa una successione crescente di funzioni non negative.

La successione di insiemi

$$N \mapsto A_{N,t} = \{x \mid f(x) > t\,,\ \|x\| < N\} \qquad \text{(con } t \text{ fissato)}$$

è una successione crescente di insiemi e

$$\bigcup_{N>0} A_{N,t} = \{x \mid f(x) > t\}$$

così che

$$\lim_N \lambda_{f_N}(t) = \lim_N \lambda(A_{N,t}) = \lambda(\{x \mid f(x) > t\}) = \lambda_f(t)\,.$$

L'uguaglianza (2.20) segue ancora dal Teorema della convergenza monotona e dal suo Corollario 69. ∎

**Osservazione 71** Se $\lambda_f(t)$ è finita per ogni $t$ allora l'integrale a destra in (2.20) è un integrale improprio, limite di integrali di Riemann perchè $\lambda_f(t)$ è decrescente. Potrebbe però essere $\lambda_f(t) = +\infty$ se $t \in (0, \epsilon)$ per un $\epsilon > 0$. In tal caso l'integrale è infinito sia per definizione che come limite degli integrali di $\lambda_{f_N}(t)$. Si confronti col caso analogo incontrato quando la funzione $f(x)$ è una funzione semplice nel Teorema 48. ∎

Il teorema della Convergenza Monotona talvolta si usa direttamente, come nella dimostrazione del Teorema 70; più spesso se ne usano le conseguenze seguenti:

**Teorema 72 (**di LEMMA DI FATOU**)** *Sia $(f_n)$ una successione di funzioni integrabili su $\Omega$ e sia*

$$f_n(x) \geq 0 \quad \textit{q.o. } x \in \Omega\,, \qquad f(x) = \lim f_n(x) \quad \textit{q.o. } x \in \Omega\,.$$

*Allora vale*

$$\int_\Omega f(x)\, dx \leq \liminf \int_\Omega f_n(x)\, dx\,.$$

**Dim.** La funzione $f$ è non negativa e quindi il suo integrale esiste, eventualmente $+\infty$. Inoltre,

$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \left[\lim_n f_n(x)\right]\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \left[\lim_n \inf_{m\geq n} \{f_m(x)\}\right]\,\mathrm{d}x\,. \qquad (2.22)$$

Si noti che la successione

$$n \to \inf_{m\geq n} \{f_m(x)\}$$

è crescente. Si può quindi usare il teorema della convergenza monotona e si vede che l'ultimo integrale in (2.22) è uguale a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \inf_{m\geq n} \{f_m(x)\}\,\mathrm{d}x = \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega \inf_{m\geq n} \{f_m(x)\}\,\mathrm{d}x \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x\,. \blacksquare$$

Proviamo infine il teorema che si usa più comunemente:

**Teorema 73 (** DI LEBESGUE O DELLA CONVERGENZA DOMINATA**)** *Sia $g$ una funzione non negativa e sommabile e quindi valga*

$$\int_\Omega g(x)\,dx < +\infty\,.$$

*Siano $f_n(x)$, $f(x)$ misurabili su $\Omega$ e tali che q.o. $x \in \Omega$*

$$|f_n(x)| \leq g(x)\,, \qquad \lim f_n(x) = f(x)\,.$$

*Allora $f(x)$ è sommabile e inoltre vale*

$$\lim \int_\Omega f_n(x)\,dx = \int_\Omega [\lim f_n(x)]\,dx = \int_\Omega f(x)\,dx\,.$$

*In particolare, la funzione $f(x)$ è sommabile.*

**Dim.** Il Corollario 37 mostra che $f(x)$ e quindi anche $f_+(x)$ ed $f_-(x)$ sono misurabili. La disuguaglianza $|f(x)| \leq g(x)$ mostra che $0 \leq f_\pm(x) \leq g(x)$ e quindi sia $f_+$ che $f_-$ sono sommabili. Dunque anche $f(x)$ è sommabile, ossia ha integrale finito. Mostreremo che vale

$$\limsup \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x \leq \liminf \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x\,. \qquad (2.23)$$

Ciò fatto seguirà l'esistenza del limite

$$\lim \int_\Omega f_n(x)\,\mathsf{d}x\,,$$

uguale all'integrale di $f(x)$ perchè ovviamente si ha

$$\liminf \int_\Omega f_n(x)\,\mathsf{d}x \le \limsup \int_\Omega f_n(x)\,\mathsf{d}x\,.$$

La dimostrazione di (2.23) si ottiene applicando il Lemma di Fatou alle funzioni non negative $g - f_n$. Si trova

$$\int_\Omega [g(x) - f(x)]\,\mathsf{d}x \le \liminf \int_\Omega [g(x) - f_n(x)]\,\mathsf{d}x$$
$$= \int_\Omega g(x)\,\mathsf{d}x + \liminf \int_\Omega [-f_n(x)]\,\mathsf{d}x = \int_\Omega g(x)\,\mathsf{d}x - \limsup \int_\Omega f_n(x)\,\mathsf{d}x$$

ossia

$$\int_\Omega f(x)\,\mathsf{d}x \ge \limsup \int_\Omega f_n(x)\,\mathsf{d}x\,.$$

Procedendo in modo analogo con le funzioni

$$g + f_n$$

si trova

$$\int_\Omega f(x)\,\mathsf{d}x \le \liminf \int_\Omega f_n(x)\,\mathsf{d}x\,.$$

L'uguaglianza cercata segue combinando tali disuguaglianze. ∎

Di conseguenza:

**Corollario 74** *Sotto le ipotesi del Teorema 73 si ha:*

$$\lim \int_\Omega |f_n(x) - f(x)|\,dx = 0\,.$$

**Dim.** Dal Teorema 73 si sa che la funzione $f(x)$ ha integrale finito. Dunque,

$$|f_n(x) - f(x)| \le g(x) + |f(x)|$$

e inoltre

$$|f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad \text{q.o. } x \in \Omega\,.$$

Essendo $g(x) + |f(x)|$ integrabile, si può applicare il teorema della Convergenza Dominata. Si trova

$$\lim \int_\Omega |f_n(x) - f(x)|\, \mathsf{d}x = \int_\Omega \lim |f_n(x) - f(x)|\, \mathsf{d}x = 0\,. \quad \blacksquare$$

**Osservazione 75** Il teorema della Convergenza Dominata permette di svincolare, in parte, la definizione di integrale dalle successioni *crescenti* di funzioni semplici. Se $(s_n(x))$ è una successione di funzioni semplici convergente q.o. ad $f(x)$ *e se esiste* $g(x)$ *integrabile maggiorante le* $s_n(x)$, allora vale

$$\lim \int_\Omega s_n(x)\, \mathsf{d}x = \int_\Omega f(x)\, \mathsf{d}x\,. \quad \blacksquare$$

# Capitolo 3

# Disuguaglianze

Proviamo ora alcune importanti disuguaglianze per gli integrali procedendo come segue: dimostriamo prima la disuguaglianza di Jensen e da questa deduciamo la disuguaglianza di Hölder. Dalla disuguaglianza di Hölder deduciamo la disuguaglianza di Minkowski.

Una dimostrazione della disuguaglianza di Hölder di tipo "geometrico" e che non fa uso della disuguaglianza di Jensen si vedrà al paragrafo 3.1.2 dove si potrà anche trovare una diversa dimostrazione della disuguaglianza di Jensen.

Vedremo quindi quali inclusioni valgono per certi spazi di funzioni le cui potenze sono integrabili secondo Lebesgue.

## 3.1 Disuguaglianze di Jensen, Hölder e Minkowski

Ricordiamo che una funzione $F$ definita su $\mathbb{R}$ è convessa quando[1]

$$F\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F(x_i) \tag{3.1}$$

con $n$ numero *naturale qualsiasi* e con i coefficienti $\alpha_n$ che verificano

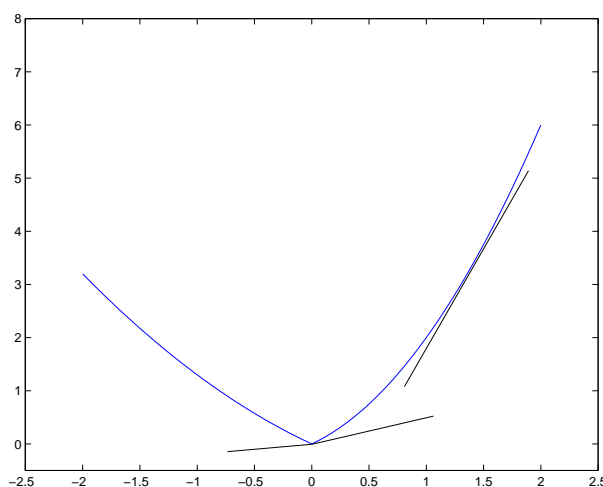
$$\alpha_i \ge 0\,, \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\,. \tag{3.2}$$

[1] la definizione usuale si dà con $n = 2$ ma è chiaro che la definizione usuale equivale alla (3.1).

Ricordiamo inoltre che ogni funzione convessa su $\mathbb{R}$ è continua e quindi misurabile.

Il grafico di una funzione convessa e derivabile sta sopra a ciascuna delle sue tangenti. Però una funzione convessa non è necessariamente derivabile. Più in generale vale la proprietà seguente: se $F$ è definita su $\mathbb{R}$ e se $(t_0, F(t_0))$ è un punto del grafico, si trova sempre almeno una retta (non verticale) per tale punto, che è sotto al grafico. Ossia, esiste un coefficiente angolare $m$ (dipendente da $t_0$) tale che (si veda la figura 3.1)

$$F(t) \geq F(t_0) + m(t - t_0) \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,. \tag{3.3}$$

Figura 3.1:

Proviamo:

**Teorema 76** *Siano $h(x)$, $k(x)$ due funzioni misurabili su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Sia inoltre*

$$k(x) \geq 0\,, \qquad \int_\Omega k(x)\, dx = 1\,. \tag{3.4}$$

*Sia $F$ convessa su $\mathbb{R}$ e sia* finito *l'integrale su $\Omega$ di $h(x)k(x)$:*

$$\int_\Omega h(x)k(x)\, dx \in \mathbb{R}\,.$$

*Sotto queste ipotesi vale*

$$F\left(\int_\Omega h(x)k(x)\,dx\right) \le \int_\Omega F(h(x))k(x)\,dx\,. \tag{3.5}$$

**Dim.** Usiamo la disuguaglianza (3.3). Scegliendo

$$t = h(x)$$

si ha

$$F(h(x)) \ge F(t_0) + m(h(x) - t_0)\,.$$

In questa disuguaglianza $t_0$ è qualsiasi ed $m$ è un numero opportuno, dipendente dalla scelta di $t_0$.

Moltiplicando i due membri per $k(x)$, che è non negativa, si trova

$$F(h(x))k(x) \ge F(t_0)k(x) + m(h(x) - t_0)k(x)\,. \tag{3.6}$$

Integriamo i due membri su $\Omega$ e ricordiamo che l'integrale di $k(x)$ vale $1$. Si trova

$$\int_\Omega F(h(x))k(x)\,dx \ge F(t_0) + m\left\{\int_\Omega h(x)k(x)\,dx - t_0\right\}\,. \tag{3.7}$$

Questa disuguaglianza è valida *per ogni* $t_0$, pur di scegliere un opportuno valore di $m$, $m = m(t_0)$.

Ricordiamo ora che la funzione $h(x)k(x)$ ha integrale *finito* e scegliamolo come valore di $t_0$:

$$t_0 = \int_\Omega h(x)k(x)\,dx\,.$$

Scelto tale valore per $t_0$ esiste un valore del coefficiente angolare $m$ per cui vale la disuguaglianza (3.7). Il numero che lo moltiplica il coefficiente angolare $m$ è nullo:

$$\left\{\int_\Omega h(x)k(x)\,dx - t_0\right\} = 0\,.$$

Dunque rimane

$$\int_\Omega F(h(x))k(x)\,dx \ge F\left(\int_\Omega h(x)k(x)\,dx\right)\,,$$

ossia la (3.5). ∎

**Osservazione 77** Si noti esplicitamente che la (3.5) *NON VALE* se l'integrale di $k(x)$ è diverso da $1$. ∎

La (3.5) si chiama DISUGUAGLIANZA DI JENSEN. Essa estende la definzione di convessità, ossia la (3.1) dalle somme finite agli integrali.

La disuguaglianza di Jensen talvolta si usa direttamente; più spesso si usa la sua conseguenza seguente. Per illustrarla, dobbiamo introdurre una ulteriore definizione.

Due numeri $p$, $q$ in $(1, +\infty)$ si dicono ESPONENTI CONIUGATI se

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,; \qquad \text{equivalentemente se} \quad q = \frac{p}{p-1}\,.$$

Se $p = 1$ il suo esponente coniugato è, per definizione, $+\infty$ mentre l'esponente coniugato di $+\infty$ è, per definizione, $1$.

Si noti che $p = 2$ coincide col suo coniugato e che

$$q = \frac{p}{p-1} \quad \text{equivale a} \quad p = \frac{q}{q-1}\,.$$

Si ha:

**Teorema 78** *Sia $1 < p < +\infty$ e $q$ il suo esponente coniugato. Siano $|f(x)|^p$ e $|g(x)|^q$ sommabili*[2] *su $\Omega$. Allora $f(x)g(x)$ è sommabile su $\Omega$ e vale:*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\, dx \le \left[\int_\Omega |f(x)|^p\right]^{1/p} \left[\int_\Omega |g(x)|^q\right]^{1/q}\,. \tag{3.8}$$

<u>**Dim.**</u> La disuguaglianza è ovvia se uno degli integrali a destra è nullo perché in tal caso la corrispondente funzione è nulla q.o. e quindi anche l'integrale a sinistra è nullo. *Consideriamo quindi il caso in cui ambedue gli integrali a destra sono numeri positivi.*

Notiamo che basta provare la disuguaglianza su insiemi limitati. Sia infatti $(\Omega_r)$ una successione crescente di insiemi limitati, tale che $\Omega = \cup\Omega_r$. Per esempio, $\Omega_r = \Omega \cap \{x\,:\,\|x\| < R\}$. Per il Corollario 68, un integrale calcolato su $\Omega$ è il limite degli integrali calcolati su ciascuno dei $\Omega_r$. Dunque, se la disuguaglianza vale su ciascun $\Omega_r$ essa vale anche su $\Omega$

Ci siamo così ricondotti a dover provare la disuguaglianza su un insieme $\Omega$ *limitato.* Come ulteriore passo, notiamo che basta provare la disuguaglianza nel

[2] si ricordi: sommabile significa che l'integrale è finito.

caso di funzioni $f(x)$ e $g(x)$ non negative e limitate. Non negative è ovvio, perché le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ figurano sotto il segno di valore assoluto. Per vedere che possiamo ricondurci al caso delle funzioni limitate, introduciamo

$$f^{(N)}(x) = \min\{f(x)\,,\ N\}\ , \qquad g^{(N)}(x) = \min\{g(x)\,,\ N\}\ .$$

Le successioni di funzioni (non negative) $(f^{(N)}(x)\,)$, $(g^{(N)}(x)\,)$ e $(f^{(N)}(x)g^{(N)}(x)\,)$ sono crescenti e convergono rispettivamente ad $f(x)$, $g(x)$ ed $f(x)g(x)$. Ad esse si può applicare il Teorema di della Convergenza Monotona. Dunque, se la disuguaglianza vale per ogni $N$, essa vale anche per le funzioni $f(x)$ e $g(x)$.

*Ricapitolando ci siamo ricondotti a provare che la disuguaglianza (3.8) vale per $f(x)$ e $g(x)$ non negative, limitate, e definite su un insieme limitato e con integrale finito.*

Dividendo i due membri della (3.8) per[3]

$$\left[\int_\Omega f(x)^p\right]^{1/p}\left[\int_\Omega g(x)^q\right]^{1/q}$$

si vede che basta provare

$$\int_\Omega \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)\,\mathsf{d}x \le 1\,,$$

ove

$$\tilde{f}(x) = \frac{f(x)}{\left[\int_\Omega f(x)^p\,\mathsf{d}x\right]^{1/p}}\,, \qquad \tilde{g}(x) = \frac{g(x)}{\left[\int_\Omega g(x)^q\,\mathsf{d}x\right]^{1/q}}\,.$$

Queste funzioni sono non negative e

$$\int_\Omega \tilde{f}^p(x)\,\mathsf{d}x = 1\,, \qquad \int_\Omega \tilde{g}^q(x)\,\mathsf{d}x = 1\,.$$

Vogliamo far intervenire la diseguaglianza di Jensen. Per ricondursi alla notazione usata nel Teorema 76, introduciamo

$$F(x) = |x|^p\,, \qquad k(x) = \tilde{g}(x)^q\,, \qquad h(x) = \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)^{1-q}\,.$$

[3]non indichiamo più il valore assoluto perché siamo ormai ricondotti al caso delle funzioni non negative.

Essendo $p > 1$, la funzione $F(x)$ è convessa su $\mathbb{R}$; essendo $\Omega$ limitato e le funzioni limitate, l'integrale di $h(x)k(x) = \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$ è finito; e $k(x)$ ha integrale $1$. Vale quindi

$$F\left(\int_\Omega h(x)k(x)\,\mathsf{d}x\right) \le \int_\Omega F(h(x))k(x)\,\mathsf{d}x\,,$$

ossia

$$\left(\int_\Omega \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)\,\mathsf{d}x\right)^p \le \int_\Omega \left\{\tilde{f}(x)[\tilde{g}(x)]^{1-q}\right\}^p \tilde{g}(x)^q\,\mathsf{d}x\,.$$

Notiamo ora che

$$p(1-q)+q = 0$$

così che

$$\left\{\tilde{f}(x)[\tilde{g}(x)]^{1-q}\right\}^p \tilde{g}(x)^q = \tilde{f}^p(x)[\tilde{g}(x)]^{p(1-q)+q} = \tilde{f}^p(x)\,.$$

Sia ha quindi

$$\left(\int_\Omega \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)\,\mathsf{d}x\right)^p \le \int_\Omega \tilde{f}^p(x)\,\mathsf{d}x = 1\,,$$

come richiesto. ∎

**Osservazione 79** La condizione perchè la (3.8) valga col segno di uguale è che esista un numero $C$ tale che $|f(x)|^p = C|g(x)|^q$ q.o. su $\Omega$. Ciò è provato nel Teorema 86. ∎

La diguaglianza (3.8) si chiama DISUGUAGLIANZA DI HÖLDER. Nel caso $p = 2$ la disuguaglianza si chiama DISUGUAGLIANZA DI SCHWARZ. Da essa si deduce:

**Teorema 80** *Sia $p \ge 1$ e siano $f$, $g$ funzioni misurabili. Vale*

$$\left[\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p\right]^{1/p} \le \left[\int_\Omega |f(x)|^p\right]^{1/p} + \left[\int_\Omega |g(x)|^p\right]^{1/p}\,. \tag{3.9}$$

*In particolare se sia $|f(x)|^p$ che $|g(x)|^p$ sono sommabili anche $|f(x)+g(x)|^p$ lo è.*

**Dim.** Si osservi che:

1. la disuguaglianza (3.9) vale anche se una delle due funzioni $|f(x)|^p$ oppure $|g(x)|^p$ non è sommabile perché in tal caso il membro destro è $+\infty$. Quindi dobbiamo studiare solamente il caso in cui sia $|f(x)|^p$ che $|g(x)|^p$ sono sommabili.

2. se $p = 1$ allora per ogni $x$ vale

$$0 \leq |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \,.$$

La disuguaglianza (3.9) segue integrando i due membri. In particolare se sia $|f(x)|$ che $|g(x)|$ sono sommabili anche $|f(x) + g(x)|$ è sommabile.

*Ricapitolando, rimane da provare il teorema nel caso $p > 1$ e quando sia $|f(x)|$ che $|g(x)|$ sono sommabili.*

Procediamo in due passi:

**Passo 1: proviamo che se sia $|f(x)|^p$ che $|g(x)|^p$ sono sommabili anche $|f(x) + g(x)|^p$ lo è.** Ciò si vede grazie a questa ovvia disuguaglianza: che vale quando $a \geq 0$, $b \geq 0$:

$$(a + b)^p \leq 2^p \max\{a^p\,,\ b^p\} \leq 2^p\,(a^p + b^p)\ .$$

Dunque

$$\int_{\Omega_+} |f(x) + g(x)|^p \, \mathsf{d}x \leq \int_{\Omega_+} (|f(x)| + |g(x)|)^p \ \mathsf{d}x$$
$$2^p \left[\int_\Omega |f(x)|^p \, \mathsf{d}x + \int_\Omega |g(x)|^p\right] \mathsf{d}x < +\infty \,.$$

**Passo 2: proviamo la disuguaglianza (3.9).** Ricordiamo che stiamo studiando il caso $p > 1$ e quindi $p - 1 > 0$. Dunque si ha:

$$|f(x) + g(x)|^p = |f(x) + g(x)|^{p-1}|f(x) + g(x)|$$
$$\leq |f(x) + g(x)|^{p-1}|f(x)| + |f(x) + g(x)|^{p-1}|g(x)| \,.$$

Integrando si trova

$$\int_\Omega |f(x) + g(x)|^p \, \mathsf{d}x$$
$$= \int_\Omega |f(x) + g(x)|^{p-1}|f(x)| \, \mathsf{d}x + \int_\Omega |f(x) + g(x)|^{p-1}|g(x)| \, \mathsf{d}x \,.$$

Consideriamo il primo integrale a destra,

$$\int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)|\,\mathsf{d}x$$

e sia

$$q = p/(p-1) \quad \text{ossia} \quad (p-1)q = p$$

l'esponente coniugato di $p$.

Essendo $(p-1)q = p$ si trova

$$\int_\Omega \left(|f(x)+g(x)|^{p-1}\right)^q\,\mathsf{d}x = \int_\Omega |f(x)+g(x)|^p\,\mathsf{d}x < +\infty\,.$$

Possiamo quindi usare la disuguaglianza di Hölder, ottenendo

$$\int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1}f(x)\,\mathsf{d}x \le \left\{\int_\Omega \left(|f(x)+g(x)|^{p-1}\right)^q\right\}^{1/q}\left\{\int_\Omega |f(x)|^p\,\mathsf{d}x\right\}^{1/p}$$

Analogamente,

$$\int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1}g(x)\,\mathsf{d}x \le \left\{\int_\Omega \left(|f(x)+g(x)|^{p-1}\right)^q\right\}^{1/q}\left\{\int_\Omega |g(x)|^p\,\mathsf{d}x\right\}^{1/p}.$$

Sommando le due disuguaglianze (e usando ancora $(p-1)q = p$) si trova

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p\,\mathsf{d}x\\ &\le \left[\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p\,\mathsf{d}x\right]^{1/q}\left\{\left[\int_\Omega |f(x)|^p\,\mathsf{d}x\right]^{1/p}+\left[\int_\Omega |g(x)|^p\,\mathsf{d}x\right]^{1/p}\right\}.\end{aligned}$$

Essendo $1-1/q = 1/p$, l'asserto segue dividendo i due membri per

$$\left[\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p\,\mathsf{d}x\right]^{1/q}. \blacksquare$$

La disuguaglianza (3.9) si chiama DISUGUAGLIANZA DI MINKOWSKI.

### 3.1.1 Gli spazi $\mathcal{L}^p(\Omega)$

La disuguaglianza di Minkowski ha la seguente importante conseguenza:

**Teorema 81** *Sia $p \geq 1$. L'insieme delle funzioni a potenza $p$–ma sommabile è uno spazio lineare.*

Lo spazio lineare delle funzioni a potenza $p$–ma integrabile su $\Omega$, $p \geq 1$, si indica col simbolo[4] $\mathcal{L}^p(\Omega)$. Conviene definire anche il simbolo $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$. Introduciamo per questo l'ESTREMO SUPERIORE ESSENZIALE di una funzione $f$. Esso si indica col simbolo ess $\sup f$ ed è definito da

$$\text{ess} \sup f = \inf \{r \mid \lambda(\{x \mid f(x) > r\}) = 0\} .$$

Si definisce quindi

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega) = \{f \mid \text{ess} \sup |f| < +\infty\} .$$

La notazione $\mathcal{L}^\infty$ è giustificata dal Teorema 91 che sarà provato al paragrafo 3.2.

E' immediato verificare che

$$\text{ess} \sup |f + g| \leq \text{ess} \sup |f| + \text{ess} \sup |g| \tag{3.10}$$

e quindi che $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ *è uno spazio lineare.* La disuguaglianza (3.10) sostituisce quella di Minkowski nel caso $p = \infty$. Analogamente, se $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ e $g \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$, vale

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| \,\mathsf{d}x \leq (\text{ess} \sup |g|) \int_\Omega |f(x)| \,\mathsf{d}x \,, \tag{3.11}$$

disuguaglianza che sostituisce quella di Hölder.

Nello studio dell'analisi funzionale è necessario sapere che la disuguaglianza di Hölder può invertirsi:

**Teorema 82** *Sia $g$ una funzione misurabile su $\Omega$ e supponiamo che esista un numero $M$ che gode della seguente proprietà: per ogni funzione misurabile e limitata $f$ si ha:*

$$\left| \int_\Omega f(x)g(x) \,\mathsf{d}x \right| \leq M \left[ \int_\Omega |f(x)|^p \,\mathsf{d}x \right]^{1/p} . \tag{3.12}$$

[4] si faccia attenzione ad usare il simbolo $\mathcal{L}^p(\Omega)$ e non $L^p(\Omega)$. Lo spazio indicato $L^p(\Omega)$ è un sottospazio di $\mathcal{L}^p(\Omega)$ che ha un ruolo importantissimo in analisi funzionale.

*Allora* $g \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ *e, più precisamente,*

$$\left[ \int_\Omega |g(x)|^q \, dx \right]^{1/q} \le M \,. \tag{3.13}$$

**Dim.** Si noti che la (3.12) vale sempre se

$$\int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}x = +\infty$$

e in tal caso non dà informazioni. Dunque consideriamo soltanto le funzione $f$ per cui

$$\int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}x < +\infty \,.$$

Sia $R > 0$ e sia

$$\Omega_R = \{ x \in \Omega \mid |x| < R \} \,.$$

Fissiamo un valore per $R$ e introduciamo le funzioni

$$g_n(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } |g(x)| < n \text{ e se } x \in \Omega_R \\ 0 & \text{altrimenti} \,. \end{cases}$$

Scegliamo

$$f_n(x) = \left[ \, |g_n(x)|^{q/p} \right] \operatorname{sgn} g_n(x) = \left[ \, |g_n(x)|^{q/p} \right] \operatorname{sgn} g(x)$$

Si noti che:

- dove $f_n(x) \neq 0$ essa ha lo stesso segno di $g_n(x)$ e quindi di $g(x)$ e quindi il loro prodotto è non negativo: $f_n(x) g_n(x) \ge 0$.
- si ha: $\int_\Omega |f_n(x)|^p \, \mathrm{d}x = \int_\Omega |g_n(x)|^q \, \mathrm{d}x$;
- per ogni $x \in \Omega_R$ si ha: $f_n(x) g_n(x) = |g_n(x)|^{1+q/p} = |g_n(x)|^q \le |g(x)|^q$.

Usando queste proprietà si trova:

$$\int_\Omega f_n(x) g_n(x) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f_n(x) g(x) \, \mathrm{d}x \le M \left[ \int_\Omega |f_n(x)|^p \, \mathrm{d}x \right]^{1/p}$$
$$= M \left[ \int_\Omega |g_n(x)|^q \, \mathrm{d}x \right]^{1/p} \,.$$

Dunque,

$$\int_\Omega |g_n(x)|^q \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f_n(x) g_n(x) \, \mathrm{d}x \le M \left[ \int_\Omega |g_n(x)|^q \, \mathrm{d}x \right]^{1/p} .$$

Dividendo si trova

$$\left[ \int_\Omega |g_n(x)|^q \, \mathrm{d}x \right]^{1/q} < M .$$

Essendo $g(x) = \lim g_n(x)$ per ogni $x \in \Omega_R$, dal Lemma di Fatou si trova:

$$\left[ \int_{\Omega_R} |g(x)|^q \, \mathrm{d}x \right]^{1/q} \le \liminf_n \left[ \int_\Omega |g_n(x)|^q \, \mathrm{d}x \right]^{1/q} \le M .$$

La (3.13) segue passando al limite per $R \to +\infty$. ∎

**Osservazione 83** L'ipotesi di limitatezza sulle funzioni $f$ è stata imposta solo perché così il teorema diventa di uso più facile. ∎

### 3.1.2 Una diversa dimostrazione delle disuguaglianze di Hölder e di Jensen

Mostriamo ora una diversa dimostrazione della disuguaglianza di Hölder e della disuguaglianza di Jensen. Si noti che la dimostrazione che qui presentiamo della disuguaglianza di Hölder è di tipo "geometrico" e non passa attraverso la preliminare dimostrazione della disuguaglianza di Jensen. Inoltre, *da questa dimostrazione apparirà chiaramente quando le disuguaglianza di Hölder vale col segno di uguaglianza.*

#### La disuguaglianza di Hölder

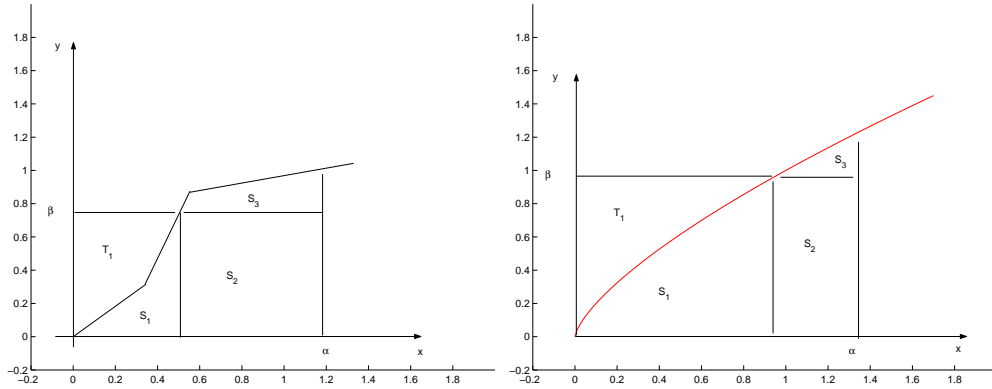
Premettiamo due lemmi.

**Lemma 84** *Sia $\zeta(x)$ strettamente crescente per $x > 0$, nulla per $x = 0$. Consideriamo due punti $(\alpha, 0)$ sull'asse delle ascisse e $(0, \beta)$ sull'asse delle ordinate. Si ha:*

$$\alpha\beta \le \int_0^\alpha \zeta(x) \, dx + \int_0^\beta \zeta^{-1}(x) \, dx . \tag{3.14}$$

*L'uguaglianza vale se e solo se $\beta = \zeta(\alpha)$.*

**Dim.** Per seguire la dimostrazione, si guardi la figura 3.2 a sinistra. Per fissare le idee consideriamo il caso in cui $\beta < \xi(\alpha)$, come in figura. Il caso opposto si tratta in modo analogo. Il prodotto $\alpha\beta$ è l'area dell'unione degli insiemi $T_1$, $S_1$

Figura 3.2:

ed $S_2$ mentre l'unione $T_1 \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3$ è l'unione del trapezoide della funzione $\zeta(x)$ che insiste su $[0, \alpha]$ e di quello della sua funzione inversa, ristretta a $[0, \beta]$. Dunque si ha

$$\alpha\beta \leq \int_0^\alpha \zeta(x)\, \mathrm{d}x + \int_0^\beta \zeta^{-1}(x)\, \mathrm{d}x\,,$$

come richiesto.

In questa disuguaglianza vale il segno di uguale se e solo se il rettangolo $S_3$ è ridotto ad un segmento, ossia se e solo se $\beta = \zeta(\alpha)$. ∎

Applichiamo questa disuguaglianza ad un caso speciale.

**Lemma 85** *Sia $p > 1$ e sia $q = p/(p-1)$ il suo esponente coniugato. Se $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ si ha*

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}\,. \tag{3.15}$$

*L'uguaglianza vale se e solo se $\beta = \alpha^{p-1}$.*

**Dim.** Notiamo che

$$\frac{1}{p-1} = \frac{p-(p-1)}{p-1} = q-1\,.$$

Applichiamo la (3.14) scegliendo

$$\zeta(x) = x^{p-1}\,.$$

La funzione $\zeta(x)$, rappresentata nella figura 3.2 a destra, è crescente perché $p > 1$. La sua funzione inversa è

$$\zeta^{-1}(x) = x^{1/(p-1)} = x^{q-1}$$

e quindi gli integrali a destra della (3.14) si calcolano facilmente e si trova la disuguaglianza cercata:

$$\alpha\beta \le \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}\,.$$

L'uguaglianza vale se e solo se $\beta = \zeta(\alpha) = \alpha^{p-1}$. ∎

*Proviamo ora la disuguaglianza di Hölder.*

Siano $f(x) \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ e $g(x) \in \mathcal{L}^q(\Omega)$. Introduciamo le notazioni

$$||f||_p = \left[\int_\Omega f(x)^p\right]^{1/p} < \infty\,, \qquad ||g||_q = \left[\int_\Omega g(x)^q\right]^{1/q} < \infty\,.$$

Per ogni valore di $x$ definiamo

$$\alpha = \frac{|f(x)|}{||f||_p}\,, \qquad \beta = \frac{|g(x)|}{||g||_q}\,.$$

Di conseguenza, usando la (3.15) si trova che per ogni $x$ vale

$$\frac{|f(x)|}{||f||_p}\frac{|g(x)|}{||g||_q} \le \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{||f||_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{||g||_q^q}\,. \tag{3.16}$$

Questa disuguaglianza vale col segno di uguale se e solo se

$$\frac{|g(x)|}{||g||_q} = \left\{\frac{|f(x)|}{||f||_p}\right\}^{p-1}\,.$$

Integrando su $\Omega$ e notando che $p + q = 1$, si vede che il membro destro ha integrale uguale ad $1$ e quindi, moltiplicando per il denominatore che figura a sinistra, si trova l'asserto del Teorema 78. Più ancora:

**Teorema 86** *Il segno di uguale vale nella disuguaglianza di Hölder se e solo se esiste un numero $C$ tale che*

$$|f(x)|^p = C|g(x)|^q \qquad \text{q.o. } x \in \Omega\,.$$

**Dim.** Il segno di uguale vale nella disuguaglianza di Hölder se e solo se la disuguaglianza stretta in (3.16) si ha solo per le $x$ in un s.insieme nullo di $\Omega$. Ossia, si ha l'uguaglianza nella disuguaglianza di Hölder se e solo se

$$\frac{|g(x)|}{||g||_q} = \left\{ \frac{|f(x)|}{||f||_p} \right\}^{p-1} \qquad \text{q.o.} \quad x \in \Omega\,.$$

Elevando i due membri a potenza $q = p/(p-1)$ si vede che l'uguaglianza vale se e solo se

$$|f(x)|^p = \underbrace{\|f\|_p^p \left(\|g\|_q^q\right)^{-1}}_{C} |g(x)|^q\,. \quad ∎$$

### La disuguaglianza di Jensen

Ha interesse vedere una dimostrazione della disuguaglianza di Jensen, basata direttamente sulla (3.1). Limitiamoci a considerare il caso di funzioni limitate definite su insiemi di misura finita.

Notiamo che la composizione di una funzione convessa su una funzione semplice è ancora una funzione semplice. Premettiamo:

**Lemma 87** *Siano $s$ e $\xi$ funzioni semplici su $\Omega$ e sia $F$ una funzione convessa su $\mathbb{R}$. Supponiamo inoltre*

$$\xi(x) \geq 0\,, \qquad \int_\Omega \xi(s)\, ds = 1\,. \tag{3.17}$$

*Vale:*

$$F\left(\int_\Omega s(x)\xi(x)\, dx\right) \leq \int_\Omega F(s(x))\xi(x)\, dx\,. \tag{3.18}$$

**Dim.** Rappresentiamo

$$s(x) = \sum_{i=1}^n s_i \chi_{A_i}(x)\,, \qquad \xi(x) = \sum_{i=1}^n \xi_i \chi_{A_i}(x)$$

con $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$ (e i medesimi insiemi $A_i$ in ambedue le rappresentazioni, come sempre può farsi).

Si ha:

$$\int_\Omega s(x)\xi(x)\, dx = \sum_{i=1}^n s_i \left[\xi_i \lambda(A_i)\right]\,.$$

I numeri $\alpha_i = \xi_i \lambda(A_i)$ verificano

$$\alpha_i \geq 0\,, \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \lambda(A_i) = \int_\Omega \xi(x)\,\mathsf{d}x = 1\,.$$

Dunque possiamo usare la disuguaglianza (3.1), ottenendo

$$F\left(\int_\Omega s(x)\xi(x)\,\mathsf{d}x\right) = F\left(\sum_{i=1}^{n} s_i\,[\xi_i\lambda(A_i)]\right)$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} F(s_i)[\xi_i\lambda(A_i)] = \int_\Omega F(s(x))\xi(x)\,\mathsf{d}x\,. \blacksquare$$

**Osservazione 88** Si noti che la condizione (3.17) è quella che permette l'uso della (3.1). Ha quindi un ruolo cruciale nella dimostrazione del lemma precedente e della disuguaglianza di Jensen. ∎

Proviamo ora la disuguaglianza di Jensen nel caso in cui le funzioni non sono semplici. Ricordiamo che stiamo solo studiando il caso in cui le due funzioni $h$ e $k$ sono *limitate*, su un insieme $\Omega$ *di misura finita.*

Si costruiscono successioni crescenti di funzioni semplici, $(s_n(x))$, $(\xi_n(x))$, convergenti uniformemente rispettivamente a $h(x)$ e $k(x)$.

Vorremmo usare il lemma precedente, ma la $\xi_n$ potrebbe non avere integrale uguale ad $1$. Per ovviare a ciò sostituiamo $\xi_n$ con $\tilde{\xi}_n$,

$$\tilde{\xi}_n(x) = \frac{\xi_n(x)}{\int_\Omega \xi_n(x)\,\mathsf{d}x}\,.$$

Essendo

$$\lim \int_\Omega \xi_n(x)\,\mathsf{d}x = \int_\Omega k(x)\,\mathsf{d}x = 1\,,$$

vale ancora

$$\lim \tilde{\xi}_n(x) = k(x)\,,$$

e il limite è ancora uniforme. Si può ora applicare la (3.18):

$$F\left(\int_\Omega s_n(x)\tilde{\xi}_n(x)\,\mathsf{d}x\right) \leq \int_\Omega F(s_n(x))\tilde{\xi}_n(x)\,\mathsf{d}x\,.$$

Ora vogliamo passare al limite rispetto ad $n$. Notiamo che:

- si ha $\lim s_n(x) = h(x)$ e quindi la successione $(s_n)$ è una successione limitata di funzioni non negative, dominata dallla funzione integrabile $h(x)$;
- Dunque anche $(F(s_n(x))$ è una successione limitata sull'insieme limitato $\Omega$, convergente uniformemente ad $F(h(x))$ (si ricordi che $F(x)$ è continua su $\mathbb{R}$ perchè è convessa e che le immagini di $s_n(x)$ e di $h(x)$ appartengono ad un medesimo insieme limitato). Dunque anche questa successione è limitata, dominata dalla funzione integrabile $2|F(h(x))|$.
- il denominatore di $\tilde{\xi}_n(x)$ tende uniformemente ad $1$ e $\xi(x) \leq k(x)$. Dunque anche $\xi_n(x)$ è dominata dalla funzione integrabile $2k(x)$.

Queste osservazioni giustificano lo scambio dei segni di limite e di integrale e si trova

$$\begin{aligned}
&\lim_n F(s_n(x)) = F(h(x))\,,\\
&\lim F\left(\int_\Omega s_n(x)\tilde{\xi}_n(x)\,\mathsf{d}x\right) = F\left(\int_\Omega h(x)k(x)\,\mathsf{d}x\right)\,,\\
&\lim \int_\Omega F(s_n(x))\tilde{\xi}_n(x)\,\mathsf{d}x = \int_\Omega F(h(x))k(x)\,\mathsf{d}x\,.
\end{aligned}$$

Segue dunque la (3.5).

## 3.2 Le relazioni tra spazi $\mathcal{L}^p(\Omega)$

La disuguaglianza di Hölder permette di studiare quali relazioni intercorrano tra spazi $\mathcal{L}^p(\Omega)$, sul medesimo insieme $\Omega$, ma con esponenti diversi. E' immediato costruire esempi di funzioni in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ che non sono in $\mathcal{L}^r(\mathbb{R})$ per ogni scelta degli esponenti $p$ ed $r$. Però:

**Teorema 89** *Se $\lambda(\Omega) < +\infty$ e se $p < q$ allora $\mathcal{L}^q(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^p(\Omega)$.*

*Se $\Omega$ ha misura infinita i due spazi $\mathcal{L}^p(\Omega)$ e $\mathcal{L}^q(\Omega)$ hanno elementi comuni ma non sono inclusi l'uno nell'altro.*

**Dim.** Vogliamo provare che se $f \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ allora si ha anche $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, purché sia $p < q$. Si noti che $|f|^p = (|f|^q)^{p/q}$ e che $(q/p) > 1$. L'esponente coniugato di $(q/p)$ è

$$\frac{q}{q-p}\,.$$

Dunque, dalla disuguaglianza di Hölder,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x)|^p\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega |f(x)|^p \cdot 1\,\mathrm{d}x\\ &\le \left[\int_\Omega (\,|f(x)|^p)^{q/p}\,\mathrm{d}x\right]^{p/q} \cdot \left[\int_\Omega (1)^{q/(q-p)}\,\mathrm{d}x\right]^{(q-p)/q} < +\infty\,.\end{aligned}$$

Gli spazi $\mathcal{L}^p(\Omega)$ e $\mathcal{L}^q(\Omega)$ non sono disgiunti perché la funzione nulla appartiene ad ambedue. Limitiamoci a mostrare che $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ e $\mathcal{L}^q(\mathbb{R})$ non sono inclusi l'uno nell'altro. Infatti, $f(x) = e^{-|x|}/[\sqrt{|x|}]$ è in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ma non in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Invece, $f(x) = 1/(1+|x|)$ è in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ ma non in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. ∎

In generale[5] vale il risultato seguente:

**Teorema 90** *Sia* $1 \le p < r \le +\infty$ *e sia* $f \in \mathcal{L}^p(\Omega) \cap \mathcal{L}^r(\Omega)$*. Allora,* $f$ *appartiene anche a* $\mathcal{L}^q(\Omega)$ *per ogni* $q$ intermedio *tra* $p$ *ed* $r$*:* $p < q < r$*.*

**<u>Dim</u>.** Consideriamo prima il caso $r = +\infty$. Dobbiamo provare che se $f$ è essenzialmente limitata ed anche in $\mathcal{L}^p(\Omega)$ allora $f \in \mathcal{L}^r(\Omega)$ per ogni $r > p$.

Dividendo per ess $\sup|f|$, e alterando il valore di $f$ su un insieme di misura nulla, si può supporre $|f(x)| \le 1$ su $\Omega$. In questo caso,

$$|f(x)|^r \le |f(x)|^p \quad \text{e quindi} \qquad \int_\Omega |f(x)|^r \le \int_\Omega |f(x)|^p < +\infty\,.$$

Supponiamo ora di sapere che $f \in \mathcal{L}^p(\Omega) \cap \mathcal{L}^r(\Omega)$ con $1 \le p < r < +\infty$. Fissiamo $q \in (0, r)$ e proviamo che vale la disuguaglianza seguente, da cui immediatamente segue l'asserto:

$$\int_\Omega |f(x)|^q\,\mathrm{d}x \le \left[\int_\Omega |f(x)|^r\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{q-p}{r-p}} \left[\int_\Omega |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{r-q}{r-p}}\,. \tag{3.19}$$

Si noti che un punto $q$ del segmento $(p, r)$ si rappresenta come

$$q = \alpha r + \beta p\,, \qquad \alpha = \frac{q-p}{r-p}\,, \quad \beta = \frac{r-q}{r-p}\,.$$

Inoltre,

$$\alpha + \beta = 1\,, \qquad \frac{1}{\alpha} > 1\,, \quad \frac{1}{\beta} > 1$$

[5] naturalmente il caso significativo si ha quando $\lambda(\Omega) = +\infty$ altrimenti vale il primo asserto del Teorema 89 che è ben più forte.

ossia i numeri $1/\alpha$ ed $1/\beta$ sono esponenti coniugati l'uno dell'altro. Quindi possiamo usare la disuguaglianza di Hölder come segue:

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x)|^q \,\mathsf{d}x &= \int_\Omega |f(x)|^{\alpha r}|f(x)|^{\beta p}\,\mathsf{d}x \\ &\le \left[\int_\Omega (|f(x)|^{\alpha r})^{1/\alpha}\,\mathsf{d}x\right]^\alpha \left[\int_\Omega \left(|f(x)|^{\beta p}\right)^{1/\beta}\,\mathsf{d}x\right]^\beta < +\infty\,.\end{aligned}$$

Questa è la diseguaglianza cercata. ∎

la (3.19) si chiama DISUGUAGLIANZA DI INTERPOLAZIONE.

Infine proviamo il risultato seguente che in particolare giustifica la notazione $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$:

**Teorema 91** *Vale*

$$\lim_{p\to+\infty}\left[\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p} = \text{ess sup}\,|f|\,.$$

**Dim.** Dividiamo la dimostrazione in due passi:

**Passo 1: supponiamo $\lambda(\Omega) < +\infty$.** Va provato che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $p_\epsilon$ tale che per ogni $p > p_\epsilon$ si ha

$$(1-\epsilon)(\text{ess sup}\,|f|) \le \left[\int_\Omega |f(x)|^p\,\mathsf{d}x\right]^{1/p} \le (1-\epsilon)(\text{ess sup}\,|f|)\,. \tag{3.20}$$

Useremo la disuguaglianza (3.11) che in particolare dà

$$\left[\int_\Omega |f(x)|^p\,\mathsf{d}x\right]^{1/p} \le (\text{ess sup}\,|f|)\,[\lambda(\Omega)]^{1/p}\,. \tag{3.21}$$

Ricordiamo che per ogni $\alpha > 0$ si ha

$$\lim_{p\to+\infty} \alpha^{1/p} = 1\,. \tag{3.22}$$

Grazie a questa proprietà ed a (3.21) la disuguaglianza a destra di (3.20) è immediata:

$$\left[\int_\Omega |f(x)|^p\,\mathsf{d}x\right]^{1/p} \le (\text{ess sup}\,|f|)\,\lambda(\Omega)^{1/p} \to \text{ess sup}\,|f|\,.$$

Proviamo ora la disuguaglianza da sotto in (3.20). Sia

$$r < \text{ess}\,\sup|f|$$

e sia

$$\Omega_r = \{x \mid |f(x) > r\} \quad \text{così che} \quad \lambda(\Omega_r) > 0\,.$$

Si ha

$$r[\lambda(\Omega_r)]^{1/p} \leq \left[\int_{\Omega_r} |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{1/p} \leq \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{1/p}\,.$$

Usiamo ancora (3.22). Si trova che per $p > \tilde{p}_{r,\epsilon}$ si ha

$$r(1-\epsilon) \leq \left[\int_{\Omega_r} |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{1/p} \leq \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{1/p}$$

e quindi per $p > \max\{\tilde{p}_{r,\epsilon}, p_\epsilon\}$ si ha

$$r(1-\epsilon) \leq \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{1/p} \leq (\text{ess}\,\sup|f|)(1+\epsilon)\,.$$

Passando al limite per $p \to +\infty$ si trova

$$\begin{aligned} r(1-\epsilon) &\leq \liminf \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{1/p} \\ &\leq \limsup \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{1/p} \leq (\text{ess}\,\sup|f|)(1+\epsilon)\,. \end{aligned}$$

Questa disuguaglianza vale per ogni $r < \text{ess}\,\sup|f|$. Prendendo l'estremo superiore rispetto ad $r$ si trova

$$\begin{aligned} (\text{ess}\,\sup|f|)(1-\epsilon) &\leq \liminf \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{1/p} \\ &\leq \limsup \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{1/p} \leq (\text{ess}\,\sup|f|)(1+\epsilon)\,. \end{aligned}$$

L'arbitrarietà di $\epsilon > 0$ ora mostra che

$$\liminf \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{1/p} = \limsup \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right]^{1/p} = \text{ess}\,\sup|f|\,.$$

**Passo 2: il caso $\lambda(\Omega) = +\infty$.** Introduciamo gli insiemi

$$\Omega_r = \Omega \cap \{x \mid |x| < r\}$$

Specificheremo con gli indici $_\Omega$ e $_{\Omega_r}$ gli estremi superiori essenziali calcolati su $\Omega$ o su $\Omega_r$ e notiamo che

$$\lim_{r\to+\infty} \text{ess sup}_{\Omega_r}|f| = \text{ess sup}_\Omega|f|\,. \tag{3.23}$$

Dal Corollario 68 si ha:

$$\int_\Omega |f(x)|^p \, dx = \lim_{r\to+\infty} \int_{\Omega_r} |f(x)|^p \, dx\,.$$

Dunque dobbiamo provare

$$\lim_{p\to+\infty} \left[\lim_{r\to+\infty} \int_{\Omega_r} |f(x)|^p \, dx\right]^{1/p} = \text{ess sup}_\Omega|f| \tag{3.24}$$

ossia dobbiamo provare quanto segue: *per ogni* $\epsilon > 0$ *esiste* $p_\epsilon$ *tale che se* $p > p_\epsilon$ *si ha*

$$\text{ess sup}_\Omega|f| - \epsilon < \left[\lim_{r\to+\infty} \int_{\Omega_r} |f(x)|^p \, dx\right]^{1/p} < \text{ess sup}_\Omega|f| + \epsilon\,.$$

Procediamo per assurdo e supponiamo che ciò non accada. Allora esiste un $\epsilon_0 > 0$ ed almeno una successione $p_n \to +\infty$ per cui vale una delle proprietà seguenti:

$$\textbf{a)} \quad \lim_{r\to+\infty} \left[\int_{\Omega_r} |f(x)|^{p_n} \, dx\right]^{1/p_n} < \text{ess sup}_\Omega|f| - \epsilon_0$$

$$\textbf{b)} \quad \lim_{r\to+\infty} \left[\int_{\Omega_r} |f(x)|^{p_n} \, dx\right]^{1/p_n} > \text{ess sup}_\Omega|f| + \epsilon_0\,.$$

Mostriamo che nè l'una nè l'altra di queste condizioni valgono.
*Mostriamo che la* **a)** *contraddice (3.23).* La funzione

$$r \mapsto \left[\int_{\Omega_r} |f(x)|^p \, dx\right]^{1/p}$$

e crescente e quindi se vale **a)** per ogni $r_0$ fissato vale

$$\left[\int_{\Omega_{r_0}} |f(x)|^{p_n} \, dx\right]^{1/p_n} < \text{ess sup}_\Omega|f| - \epsilon_0$$

e passando al limite per $p_n \to +\infty$ si trova

$$\text{ess}\ \sup_{\Omega_{r_0}}|f| \le \text{ess}\ \sup_{\Omega}|f| - \epsilon_0 \qquad \forall r_0 \quad \text{contro la (3.23)}\,.$$

*La* $\mathbf{b})$ *non vale:* Infatti per ogni $p_n$ si ha

$$\left[\int_{\Omega_r}|f(x)|^{p_n}\,\mathsf{d}x\right]^{1/p_n} \le \left([\lambda(\Omega_r)]^{1/p_n}\right)\text{ess}\ \sup_{\Omega_{r_0}}|f| \le \left([\lambda(\Omega_r)]^{1/p_n}\right)\text{ess}\ \sup_{\Omega}|f|$$

e per $n$ sufficientemente grande si ha

$$\left[\int_{\Omega_r}|f(x)|^{p_n}\,\mathsf{d}x\right]^{1/p_n} < \text{ess}\ \sup_{\Omega}|f| + \frac{\epsilon_0}{2}$$

contro la $\mathbf{b})$ che dovrebbe valere per ogni $p_n$.

In conclusione, vale la (3.24) e ciò completa la dimostrazione. ∎

# Capitolo 4

# I teoremi di Fubini e Tonelli

Si sa che per funzioni continue di due (o più) variabili l'intergrale di Riemann, integrale "multiplo", si calcola come integrale iterato e che come conseguenza si può "scambiare l'ordine di integrazione" negli integrali iterati.

Vogliamo studiare il problema analogo per l'integrazione secondo Lebesgue e quindi mostrare una conseguenza importante allo studio delle convoluzioni di funzioni.

## 4.1 Integrali multipli e integrali iterati

Abbiamo definito l'integrale di Lebesgue su un insieme misurabile $\Omega$ di $\mathbb{R}^n$. Estendendo $f(x) = 0$ per $x \notin \Omega$ si trova che ci si può sempre ricondurre a lavorare con funzioni definite su tutto $\mathbb{R}^n$, cosa che ora conviene fare.

Talvolta una funzione è data come "funzione di due variabili"

$$f(x, y)\,, \qquad x \in \mathbb{R}^m\,, \quad y \in \mathbb{R}^k \qquad m + k = n\,.$$

Ci si può chiedere sotto quali condizioni l'integrale "doppio" di $f(x, y)$, ossia l'integrale su $\mathbb{R}^n$, si può scrivere come "integrale iterato". A questa domanda risponde il teorema seguente:

**Teorema 92 (**DI FUBINI) *Sia* $f(x, y)$ *sommabile*[1] *su* $\mathbb{R}^{m+k} = \mathbb{R}^n$. *Consideriamo le funzioni*

$$y \mapsto f_x(y) = f(x, y)\,, \quad y \in \mathbb{R}^k\,, \qquad x \mapsto f_y(x) = f(x, y)\,, \quad x \in \mathbb{R}^m\,.$$

*Allora:*

[1] ricordiamo che "sommabile" significa che la funzione ha integrale finito.

- *q.o.* $x \in \mathbb{R}^m$ *la funzione* $f_x(y)$ è misurabile *su* $\mathbb{R}^k$ *ed il suo integrale esteso ad* $\mathbb{R}^k$ è finito;
- *q.o.* $y \in \mathbb{R}^k$*, la funzione* $f_y(x)$ è misurabile *su* $\mathbb{R}^m$ *ed il suo integrale esteso ad* $\mathbb{R}^m$ è finito;
- *Posto*
$$\Phi(x) = \int_{\mathbb{R}^k} f_x(y)\, dy\,, \qquad \Psi(y) = \int_{\mathbb{R}^m} f_y(x)\, dx\,,$$
*le due funzioni* $\Phi$ *e* $\Psi$ *sono sommabili, rispettivamente su* $\mathbb{R}^m$ *e su* $\mathbb{R}^k$*;*
- *vale:*
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^k} \Psi(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^m} \Phi(x)\, dx\,.$$

Ovviamente, in pratica si usano le notazioni

$$\Phi(x) = \int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)\, \mathrm{d}y\,, \qquad \Psi(y) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\, \mathrm{d}x$$

e l'enunciato del teorema si compendia scrivendo

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\, \mathrm{d}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^k} \left[\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\, \mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^m} \left[\int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)\, \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x\,.$$

Il teorema precedente richiede di saper che la funzione $f(x,y)$ è sommabile. Talvolta ciò non è noto. L'ipotesi che la funzione $f(x,y)$ sia sommabile può venir rimossa a patto di assumere $f(x,y) \geq 0$ e che almeno uno dei due integrali iterati è finito:

**Teorema 93 (**DI TONELLI) *Sia* $f(x,y)$ *misurabile e* q.o. non negativa *su* $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+k}$*. Sia inoltre*

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left[\int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)\, dy\right] dx < +\infty \qquad \text{oppure} \qquad \int_{\mathbb{R}^k} \left[\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\, dx\right] dy < +\infty\,.$$

*In tal caso la funzione* $f(x,y)$ *è sommabile su* $\mathbb{R}^n$ *e vale*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^m} \left[\int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)\, dy\right] dx = \int_{\mathbb{R}^k} \left[\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\, dx\right] dy\,.$$

La dimostrazione di questi teoremi è piuttosto complessa, e viene omessa. Mostriamone però un'applicazione importante.

## 4.2 Convoluzioni

In questa parte si usa una una proprietà importante della misura di Lebesgue, che è l'INVARIANZA PER TRASLAZIONI. E' immediatamente evidente dalla definizione di misura che per ogni $\alpha$ reale e per ogni insieme misurabile $A$ vale

$$\lambda(A) = \lambda(\alpha + A)$$

dove

$$\alpha + A = \{x \mid x = \alpha + a\,, \quad a \in A\}\,.$$

Conseguenza di questo è che

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x+\alpha)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Siano $f$ e $g$ due funzioni definite su $\mathbb{R}^n$. Si chiama CONVOLUZIONE delle due funzioni la funzione

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\,,$$

definita per quei valori di $x$ per i quali l'integrale esiste finito.

Per esempio, sia $n = 1$ e sia $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ per $x < 0$. In questo caso,

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\,,$$

un integrale che si incontra, per esempio, nella soluzione delle equazioni differenziali ordinarie.

Vogliamo dare condizioni sotto le quali la convoluzione è definita q.o., ed è una funzione sommabile.

Vale:

**Teorema 94** *Se $f$ e $g$ sono sommabili su $\mathbb{R}^n$ allora la loro convoluzione è definita q.o.; è una funzione sommabile e vale:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(f*g)(x)|\,dx \le \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx\right]\left[\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|\,dx\right]. \qquad (4.1)$$

**Dim.** Alla funzione

$$F(x,y) = |f(x-y)g(y)|$$

applichiamo prima il teoremi di Fubini per provare l'esistenza della convoluzione e poi quello di Tonelli per stimarla.

La $F(x,y)$ è non negativa e uno dei suoi due integrali iterati è finito. Infatti,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)g(y)|\,\mathrm{d}x\right]\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|\,\mathrm{d}x\right]|g(y)|\,\mathrm{d}y=\left[\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\,\mathrm{d}x\right]\left[\int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|\,\mathrm{d}y\right]<+\infty$$

(si noti che abbiamo usato l'invarianza per traslazione della misura di Lebesgue).

Per il teorema di Tonelli, esiste *finito*

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}|F(x,y)|d(x,y)\,.$$

Ricordando che una funzione misurabile e assolutamente integrabile è anche integrabile, si vede che si può applicare il teorema di Fubini. Quindi per q.o. $x\in\mathbb{R}^n$ esiste

$$\int_{\mathbb{R}^n}F(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y=(f*g)(x)\,.$$

Inoltre, dal teorema di Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^n}|(f*g)(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\right|\,\mathrm{d}x$$
$$\leq\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)g(y)|\,\mathrm{d}y\right]\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)g(y)|\,\mathrm{d}x\right]\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|\,\mathrm{d}x\right]|g(y)|\,\mathrm{d}y=\left[\int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|\,\mathrm{d}y\right]\left[\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\,\mathrm{d}x\right]\,,$$

Vale quindi la (4.1). ∎

Anche la disuguaglianza (4.1) si chiama DISUGUAGLIANZA DI YOUNG.

**Osservazione 95** Si è provato che la convoluzione è definita q.o. Si osservi che in generale essa *non è ovunque definita,* come prova l'esempio seguente. Sia

$$f(x)=\frac{e^{-|x|}}{\sqrt{|x|}}=g(x)\,.$$

Sia $f$ che $g$ sono integrabili, e quindi la loro convoluzione è definita q.o.; ma non è definita per $x = 0$ perché

$$(f * g)(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2|y|}}{|y|} \, \mathsf{d}y = +\infty \, . \quad \blacksquare$$

# Capitolo 5

# Derivate, primitive ed estensioni a misure qualsiasi

In questo paragrafo conclusivo presentiamo il risultato fondamentale che connette la funzione integrale con il concetto di derivata e di primitiva. Quindi notiamo questo: per introdurre l'integrale di Lebesgue prima abbiamo definito una misura $\sigma$-additiva e quindi la classe delle funzioni misurabili rispetto a tale misura. Abbiamo visto che ogni funzione misurabile si approssima mediante funzioni semplici e abbiamo usato ciò per definire l'integrale. Accenniamo al fatto che metodi simili possono usarsi "in astratto", su un insieme $\Omega$ su cui è assegnata una misura e ciò è particolarmente importante per esempio in teoria delle probabilità. Enunceremo quindi il Teorema di Radon-Nikodym che è una versione astratta delle relazioni tra integrali e derivata.

## 5.1 La funzione integrale su $\mathbb{R}$

Vogliamo presentare i risultati che intercorrono tra l'integrazione e la derivazione per le funzioni di una variabile reale. Si tratta di risultati dalla dimostrazione alquanto complessa e quindi ci limitiamo a presentarli senza dimostrazione, a parte il seguente.

Supponiamo che $f$ sia sommabile e non negativa. In questo caso

$$A \to \int_A f(s)\, \mathsf{d}s = \phi(A)$$

è una misura e l'additività dell'integrale combinata col teorema della convergenza monotona mostra che si tratta di una misura $\sigma$-additiva. Se $f$

prende anche valori negativi, si ottiene una FUNZIONE DI INSIEME definita su $\mathcal{L}$; ossia una funzione che associa un numero ad ogni elemento di $\mathcal{L}$. Questa funzione ha l'ulteriore proprietà che se $(A_i)$ è una successione di insiemi due a due disgiunti allora

$$\phi\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \phi(A_i)$$

e questa uguaglianza vale anche se $f$ non prende soltanto valori positivi. Anzi, dato che una funzione è sommabile se e solo se è assolutamente sommabile, la serie converge assolutamente.

Osserviamo che per studiare la funzione $\phi(A)$ non è restrittivo assumere $f(x) \geq 0$ q.o. $x$. Infatti, se ciò non avviene, si studiano separatamente

$$\phi_+(A) = \int_A f_+(x)\,\mathsf{d}x\,, \qquad \phi_-(A) = \int_A f_-(x)\,\mathsf{d}x$$

con

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\}\,, \qquad f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}\,.$$

Vale:

**Teorema 96** *Sia $f(x)$ da $\mathbb{R}$ in sé una funzione q.o. non negativa e sommabile su $(a,b)$. Per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $\lambda(A) < \delta$ allora $\phi(A) < \epsilon$.*

**Dim.** Limitiamoci a considerare il caso in cui $-\infty < a < b < +\infty$ (l'estensione al caso dell'intervallo illimitato non è difficile e si lascia al lettore).

Se $0 \leq f \leq M$ l'asserto è ovvio. Altrimenti, definiamo

$$f^N(x) = \min\{f(x), N\}\,.$$

Vale

$$\lim_N f^N(x) = f(x)\,, \qquad 0 \leq f^N(x) \leq f(x)$$

e per ipotesi $f(x)$ è sommabile. Dunque, per il teorema della Convergenza Dominata,

$$\lim_N \int_a^b [f(x) - f^N(x)]\,\mathsf{d}x = 0\,.$$

Fissiamo $N$ tale che

$$0 \leq \int_a^b [f(x) - f^N(x)]\,\mathsf{d}x < \epsilon/2$$

e scriviamo

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_A [f(x) - f^N(x)]\,\mathrm{d}x + \int_A f^N(x)\,\mathrm{d}x < \frac{\epsilon}{2} + N\lambda(A)\,.$$

La disuguaglianza richiesta vale se $\lambda(A) < \epsilon/(2N)$. ∎

Se $f$ non è positiva il risultato precedente si può applicare sia alle funzioni $f_+$ ed $f_-$ che alla funzione $|f|$, ottenendo un asserto analogo per la funzione di insieme $\phi(A)$.

Al risultato precedente si può dare un'espressione più "esplicita" (valida anche se $f$ non ha segno costante): per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni famiglia finita di intervalli $(x_i, x_{i+1})$, $1 \leq i \leq n$, tra loro disgiunti e tali che

$$\sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i) < \delta$$

vale

$$\sum_{i=1}^{n} |\Phi(x_{i+1}) - \Phi(x_i)| < \epsilon\,.$$

Una funzione con tale proprietà si dice ASSOLUTAMENTE CONTINUA. Dunque, *ogni funzione integrale di una funzione che è sommabile secondo Lebesgue è assolutamente continua (e quindi in particolare continua).* Notare che non si richiede che la funzione $f(x)$ abbia segno costante.

Viceversa, per funzioni di una variabile reale, vale:

**Teorema 97** *Sia $\Phi(x)$ definita su $[a,b]$ ed assolutamente continua. Allora $\Phi'(x)$ esiste q.o. su $(a,b)$ e inoltre*

$$\Phi(x) - \Phi(a) = \int_a^x \Phi'(s)\,ds\,. \tag{5.1}$$

Dunque,

**Teorema 98** *Sia $\Phi(x)$ definita su $[a,b]$. L'uguaglianza (5.1) vale se e solo se $\Phi(x)$ è assolutamente continua.*

E' bene sapere che l'insieme delle funzioni q.o. derivabili e continue è assai più ampio di quello delle funzioni assolutamente continue: per esempio si prova che ogni funzione monotona e continua è q.o. derivabile. Però l'integrale della derivata in generale non restituisce la funzione. Esistono, infatti, esempi di

funzioni $f(x)$ continue su $[0,1]$, strettamente crescenti con $f(0)=0$, $f(1)=1$ e con

$$f'(x)=0 \quad \text{q.o. } x\in(0,1)\,.$$

In tal caso,

$$f(1)-f(0)=1>\int_0^1 f'(s)\,\mathrm{d}s=0\,.$$

Un esempio è la scala di Cantor.

## 5.2 Una estensione della costruzione dell'integrale

Sia $\Omega$ un insieme qualsiasi e sia $\mathcal{F}$ una $\sigma$-algebra di s.insiemi di $\Omega$. Sia $\mu$ una misura $\sigma$-additiva definita su $\mathcal{F}$. E' ancora possibile definire le funzioni da $\Omega$ in $\mathbb{R}$ che sono misurabili, come quelle funzioni tali che per ogni $t\in\mathbb{R}$ si ha:

$$\{x\in\Omega \mid f(x)>t\}\in\mathcal{F}\,.$$

E' facile vedere che ogni funzione misurabile si approssima mediante funzioni semplici e quindi definirne l'integrale. Tutte le proprietà delle funzioni misurabili e dei loro integrali si estendono a questo contesto "astratto". Si noti però che gli enunciati che contengono "q.o." sono leciti solo se la misura è COMPLETA; ossia se ogni s.insieme di un insieme di misura zero è misurabile (e quindi ha misura zero). Altrimenti bisogna richiedere che la proprietà corrispondente valga ovunque su $\Omega$.

L'integrale di $f$ rispetto ad una misura $\mu$ si indica col simbolo

$$\phi(A)=\int_A f(x)\,\mathrm{d}\mu\,.$$

Conserveremo il termine SOMMABILE per indicare una funzione integrabile il cui integrale è finito.

Diciamo esplicitamente che anche in questo contesto più generale valgono i teoremi della convergenza monotona e della convergenza dominata ed il Lemma di Fatou.

### 5.2.1 Il teorema di Radon-Nikodym

I risultati visti al paragrafo precedente per le funzioni di una variabile possono estendersi a funzioni di più variabili e al caso di una generica misura $\sigma$-additiva su un insieme $\Omega$. Sia $\mu$ una misura $\sigma$-additiva definita su una $\sigma$-algebra $\mathcal{F}$ di s.insiemi di un'assegnato insieme $\Omega$, come si è detto al paragrafo 5.2. Sia $f$ (per semplicità non negativa) una funzione sommabile su $\Omega$ e sia

$$\phi(A) = \int_A f(x) d\mu \,. \tag{5.2}$$

Vale ancora l'analogo del teorema 96: per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $\mu(A) < \delta$ allora $\phi(A) < \epsilon$. La dimostrazione è uguale a quella del teorema 96. Una funzione $\phi$ definita su $\mathcal{F}$ a valori non negativi e che ha questa proprietà si dice ASSOLUTAMENTE CONTINUA RISPETTO A $\mu$.

Viceversa, vale il risultato seguente, che ci limitiamo ad enunciare nel caso delle funzioni d'insieme non negative:

**Teorema 99 (**di RADON-NIKODYM**)** *Sia $\mu$ una misura $\sigma$-additiva definita su una $\sigma$-algebra $\mathcal{F}$ di s.insiemi di un assegnato insieme $\Omega$ e sia $\mu(\Omega) < +\infty$. Sia $\phi$ una funzione di insieme non negativa definita su $\mathcal{F}$, assolutamente continua rispetto a $\mu$. Esiste una funzione $f$, sommabile rispetto alla misura $\mu$, per la quale vale la rappresentazione (5.2).*

*Se $g$ è una seconda funzione integrabile per cui*

$$\phi(A) = \int_A g(x)\, d\mu$$

*allora*

$$\mu \{x \mid f(x) - g(x) \neq 0\} = 0 \,.$$

# Indice analitico